



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií ■

ZPRÁVA O PROVEDENÉM MĚŘENÍ

Experimentální metody v pružnosti a pevnosti

TLUMENÉ A NETLUMENÉ KMITÁNÍ NOSNÍKU

5. 11. 2015

Jan Kredba



1 Úvod

Předmětem tohoto měření je stanovení vlastní frekvence netlumeného kmitání přímého prizmatického nosníku v závislosti na kmitající hmotě a dále stanovení vlastní frekvence kmitání a koeficientu tlumení δ při viskózním tlumení v různých tekutinách. Vlastní frekvence kmitání, společně s koeficientem tlumení, je určována na základě deformací vzniklých na povrchu nosníku, které jsou měřeny pomocí odporových tenzometrů. Ty zajišťují převod mechanických veličin na snadno měřitelný elektrický signál v podobě rozdílu napětí na diagonále můstku. Cílem tohoto měření je porovnání teoreticky vypočtených a reálně naměřených vlastních frekvencí kmitání jednostranně vetknutého nosníku, společně s experimentálním určením koeficientu tlumení.

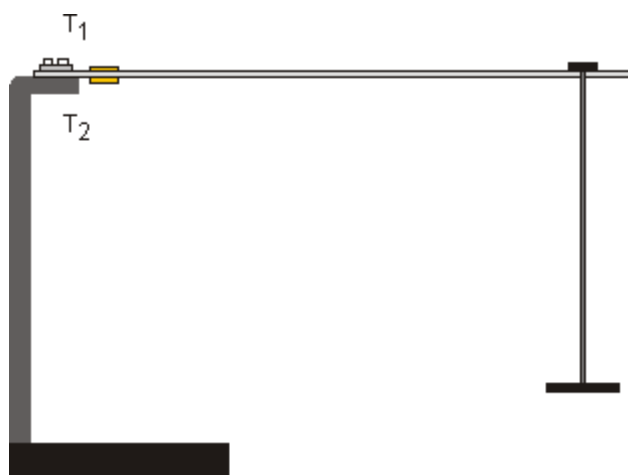
1.1 Metody měření

Měření vlastní frekvence netlumeného kmitání bylo realizováno na jednostranně vetknutém ocelovém nosníku, jehož volný konec byl postupně zatěžován jednotlivými závažími. Pro zjištění vlastní frekvence kmitání byla měřena jeho relativní povrchová deformace, jelikož je přímo úměrná výchylce volného konce nosníku. Tato deformace byla měřena odporovými tenzometry umístěnými v blízkosti vetknutí na protilehlých stranách nosníku. Ty byly dále zapojeny do tzv. polomostu, kde bylo výsledné napětí přímo úměrné této deformaci a tím i výchylce volného konce. Schéma měřicí aparatury pro měření netlumených kmitů je vyobrazeno na obrázku 1.



Obrázek 1 - Schéma měřicí aparatury pro měření netlumených kmitů

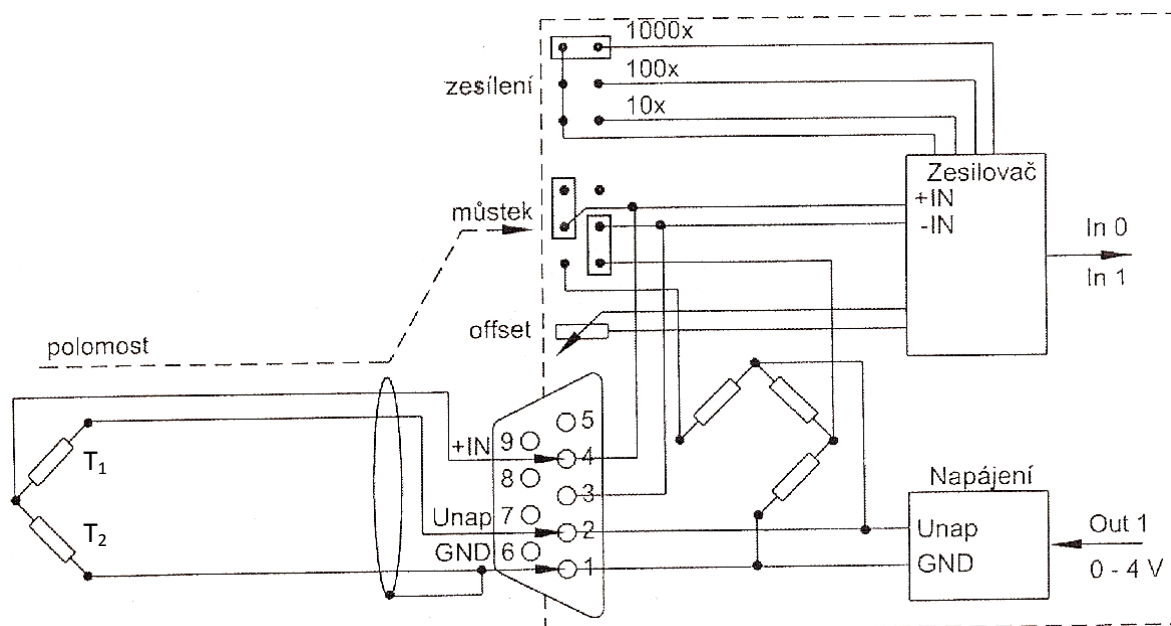
Měření tlumených kmitů nosníku bylo realizováno obdobně jako v předchozím případě, pouze s tím rozdílem, že jeho volný konec nebyl nijak dále zatěžován. Místo toho k němu byla připevněna destička, která zajišťovala tlumení kmitů. Tato destička byla postupně ponořována do jednotlivých tekutin, přičemž opět byla tenzometry nepřímě měřena výchylka kmitání nosníku. Schéma měřicí aparatury pro toto měření je uvedeno na obrázku 2.



Obrázek 2 - Schéma měřicí aparatury pro měření tlumených kmitů

1.2 Prostředky a parametry měření

Měření deformací nosníku, pomocí nichž je možné stanovit hledané veličiny, bylo realizováno dvojicí fóliových tenzometrů T_1 a T_2 , které byly umístěny na protilehlých stranách nosníku co nejbližší místa vetknutí. Tyto tenzometry byly zapojeny do tzv. polomostu, kdy je jedna větev odporového můstku tvořena tenzometry, zatímco druhá je složena pouze z rezistorů o stejné hodnotě elektrického odporu. Tím je dosaženo zvýšení citlivosti a zároveň odstraněna teplotní závislost měření. Výsledné napětí je poté měřeno na diagonále tohoto můstku. To je navíc přímo úměrné relativní deformaci nosníku a tím i výsledné výchylce kmitání. Schéma zapojení tenzometrů do měřicího řetězce je vyobrazeno na obrázku 3.



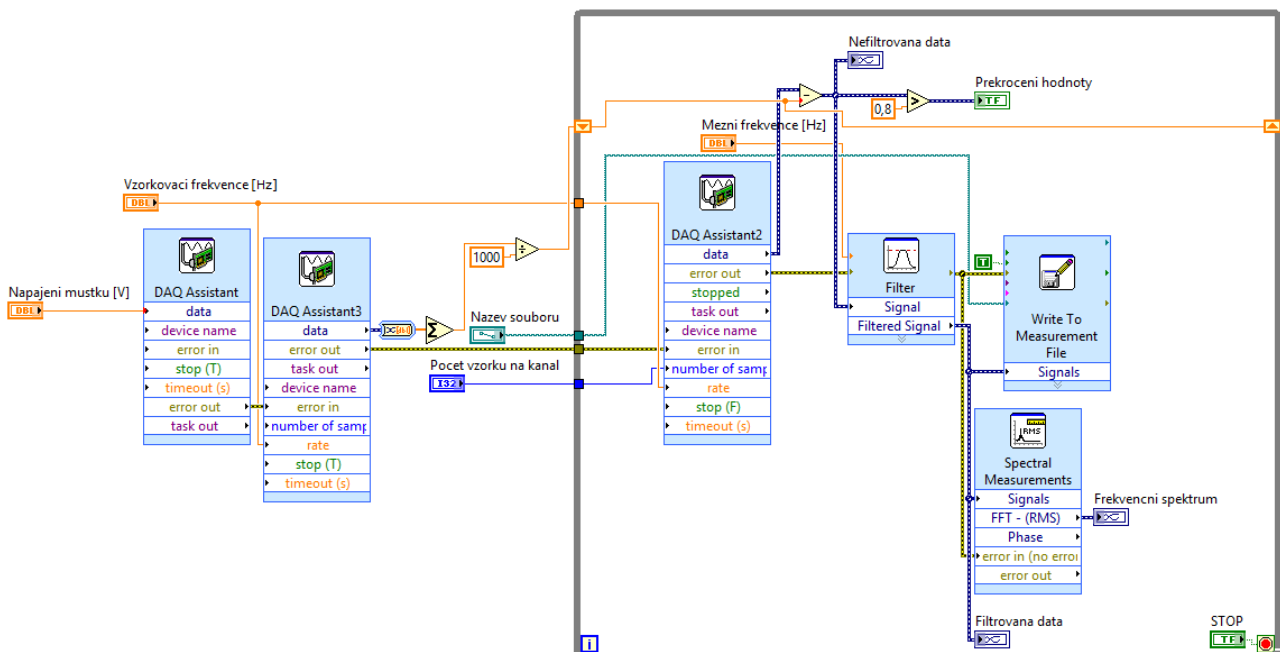
Obrázek 3 - Schéma zapojení tenzometrů do měřicího řetězce

Vzhledem k velmi malým deformacím na povrchu nosníku je i výsledná změna napětí na diagonále můstku velmi malá, a proto byla před vlastním měřením zesílena pomocí zesilovače 1000 \times . Takto zesílené napětí bylo následně změřeno měřicí kartou NI USB 6009. Kompletní seznam parametrů měřicí aparatury je uveden v tabulce 1.

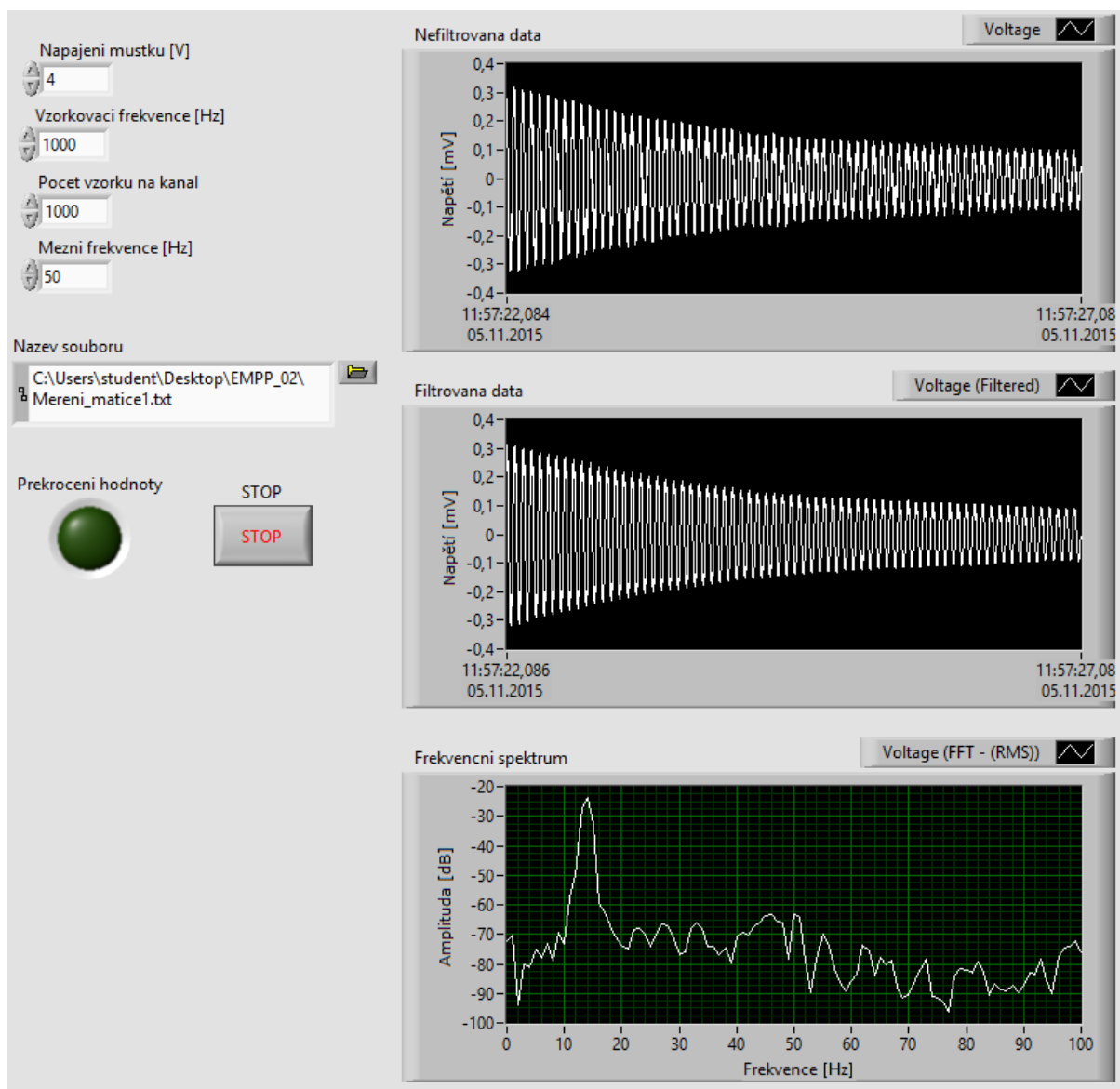
Tabulka 1 - Parametry měřicí aparatury

Veličina	Značení	Hodnota
Šířka nosníku	b	20,14 mm
Tloušťka nosníku	h	1,08 mm
Délka nosníku (od místa vetknutí)	l	201 mm
Hustota oceli	ρ	7800 kg·m ⁻³
Modul pružnosti oceli	E	210 GPa
Hmotnost matice 1	m_1	9,92 g
Hmotnost matice 2	m_2	15,16 g
Gauge faktor tenzometru	k_D	2,04
Nominální elektrický odpor tenzometru	R	120 Ω
Napájecí napětí můstku	U_N	4 V
Vzorkovací frekvence měření	f_{vz}	1 kHz
Zsilení vstupního zesilovače	-	1000

Ke sběru dat z měřicí karty bylo využito programového prostředí LabVIEW, ve kterém byl realizován měřicí software. Ten byl vytvořen především za pomoci již implementovaných expresních funkcí. Block diagram výsledného programu je vyobrazen na obrázku 4 a Front panel, sloužící k ovládání měření, je vyobrazen na obrázku 5.



Obrázek 4 - Block diagram programu pro sběr dat v prostředí LabVIEW



Obrázek 5 - Front panel programu pro sběr dat v prostředí LabVIEW

1.3 Teoretické vztahy

Případ kmitání elastického tělesa, jímž je v tomto případě přímý prizmatický nosník, kde není soustředěna ani hmotnost, ani tuhost, lze pomocí vztahů (1) a (2) převést na systém se soustředěnými parametry. Pro přepočítání tuhosti platí vztah (1), kde k je tuhost systému se soustředěnými parametry, E modul pružnosti v tahu, b šířka nosníku, h tloušťka nosníku a l délka nosníku od místa vetknutí.

$$k = \frac{3 \cdot E \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot l^3} \quad (1)$$

Hmotnost systému se soustředěnými parametry lze určit dle vztahu (2) jako tzv. redukovanou hmotnost systému m_{red} , kde m_0 je hmotnost kmitající části nosníku.

$$m_{red} = 0,24 \cdot m_0 \quad (2)$$

Hmotnost kmitající části nosníku m_0 lze vyjádřit dle vztahu (3), za pomoci známé hustoty materiálu ρ a rozměrů b , h a l , jejichž význam je uveden u vztahu (1).

$$m_0 = \rho \cdot h \cdot b \cdot l \quad (3)$$

V případě zatížení konce nosníku závažím o hmotnosti m_z je však k získání celkové hmotnosti systému se soustředěnými parametry m nutné ještě k redukované hmotnosti nosníku m_{red} tuto hmotnost připočítat, jak uvádí vztah (4).

$$m = m_{red} + m_z \quad (4)$$

Vlastní kruhovou frekvenci netlumeného kmitání Ω systému se soustředěnými parametry lze poté určit dle vztahu (5), kde k je tuhost systému a m hmotnost.

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

Mezi vlastní frekvencí systému f a jeho vlastní kruhovou frekvencí Ω přitom platí vztah (6).

$$\Omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (6)$$

Vzájemnou kombinací výše uvedených vztahů lze následně určit výsledný vztah (7) mezi vlastní frekvencí systému a jeho parametry.

$$f = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2 \cdot \pi} = \frac{\sqrt{\frac{3 \cdot E \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot l^3}}}{2 \cdot \pi} = \frac{\sqrt{0,24 \cdot \rho \cdot h \cdot b \cdot l + m_z}}{2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{E \cdot b \cdot h^3}{16 \cdot \pi^2 \cdot l^3 \cdot (0,24 \cdot \rho \cdot h \cdot b \cdot l + m_z)}} \quad (7)$$

Experimentální určení frekvence kmitání je možné realizovat měřením času mezi jednotlivými průchody nulou. Čas mezi sousedními průchody nulou je přitom roven polovině periody kmitání T_D , přičemž mezi periodou a frekvencí kmitání f platí vztah (8).

$$f = \frac{1}{T_D} \quad (8)$$

K experimentálnímu určení koeficientu tlumení δ lze využít logaritmického dekrementu útlumu \mathcal{G} , pro který platí vztah (9), kde veličiny y_1 a y_2 vyjadřují velikost dvou po sobě jdoucích amplitud se stejnou fází.

$$\mathcal{G} = \ln \frac{y_1}{y_2} \quad (9)$$

Z logaritmického dekrementu útlumu \mathcal{G} je následně možné pomocí vztahu (10) určit výsledný koeficient tlumení δ .

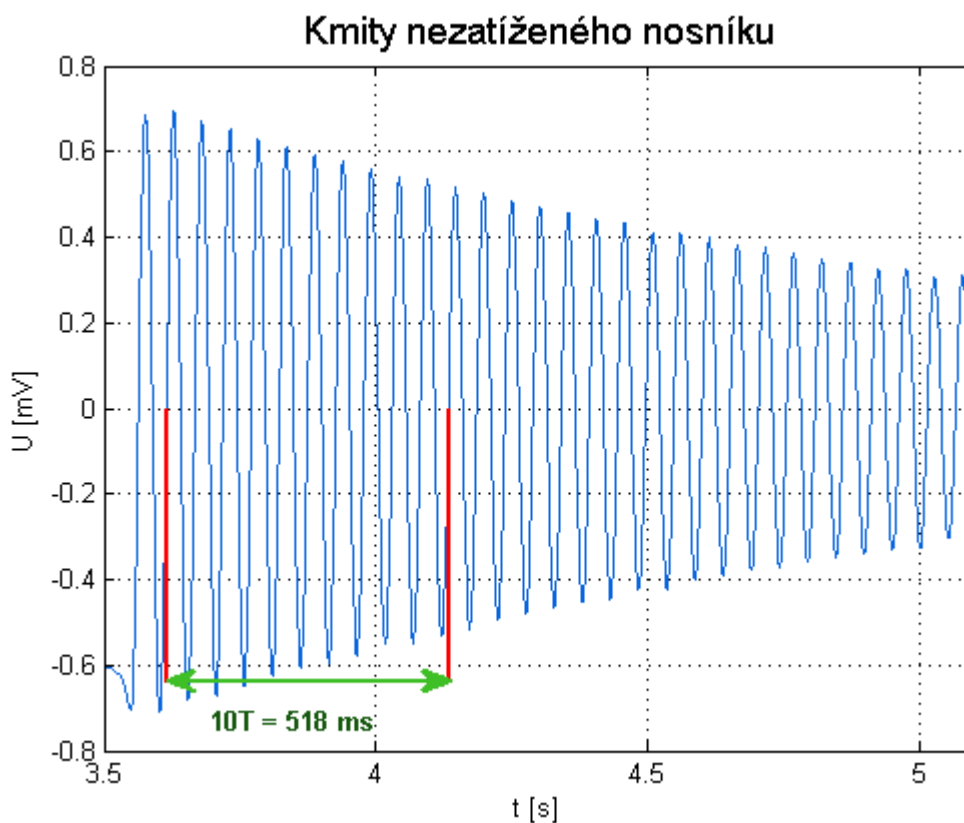
$$\delta = \frac{\mathcal{G}}{T_D} \quad (10)$$

2 Naměřená data

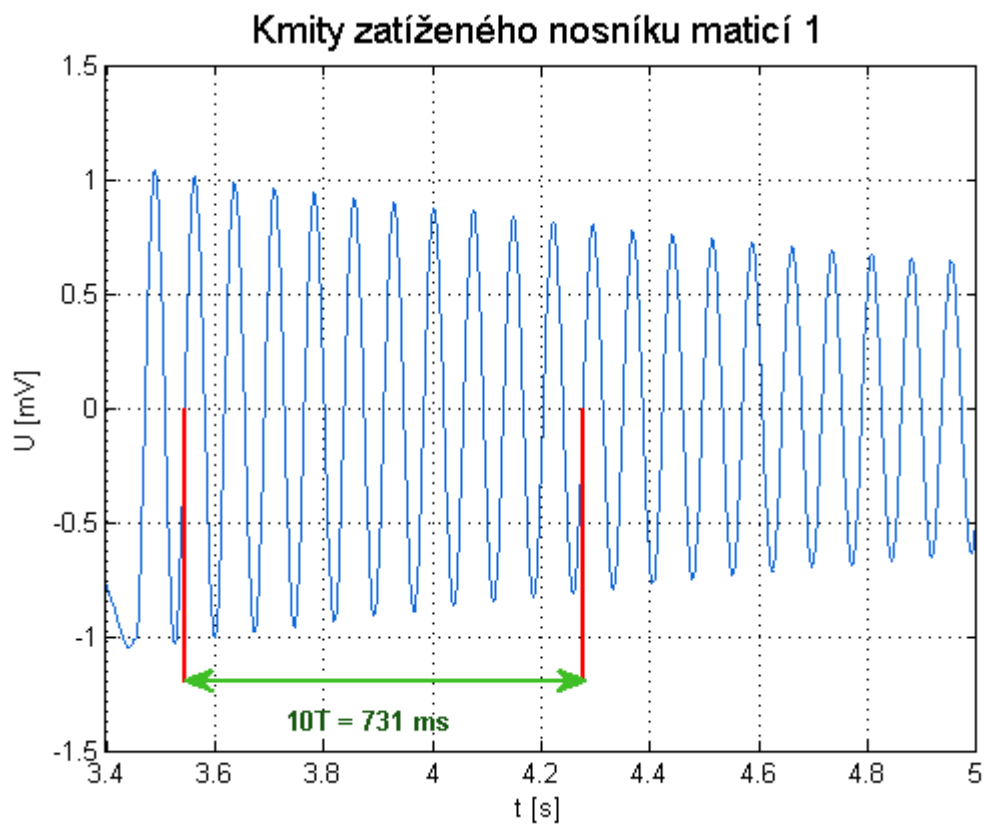
Měření byla realizována celkem na dvou různých konfiguracích měřicí aparatury (viz obrázky 1 a 2), avšak všechna probíhala za stejného nastavení měřicí karty. Konkrétně se jednalo o kontinuální měření se vzorkovací frekvencí $f_{vz} = 1 \text{ kHz}$. Měřený signál byl dále filtrován dolnoproputním filtrem o zlomové frekvenci $f_c = 50 \text{ Hz}$, tak aby došlo k potlačení šumu. Výsledné hodnoty již filtrovaného napětí byly následně zaznamenány do souboru.

2.1 Netlumené kmitání

Při měření netlumeného kmitání bylo využito měřicí aparatury dle schématu na obrázku 1. Nejprve byly změřeny kmity samotného nezatíženého nosníku. Následně byly kmity měřeny při zatížení volného konce nosníku maticí 1 a 2. Naměřené hodnoty těchto kmitů jsou vyobrazeny na obrázcích 6 ÷ 8 a jejich amplitudová frekvenční spektra jsou uvedena na obrázcích 9 ÷ 11.



Obrázek 6 - Naměřené hodnoty kmitů nezatíženého nosníku

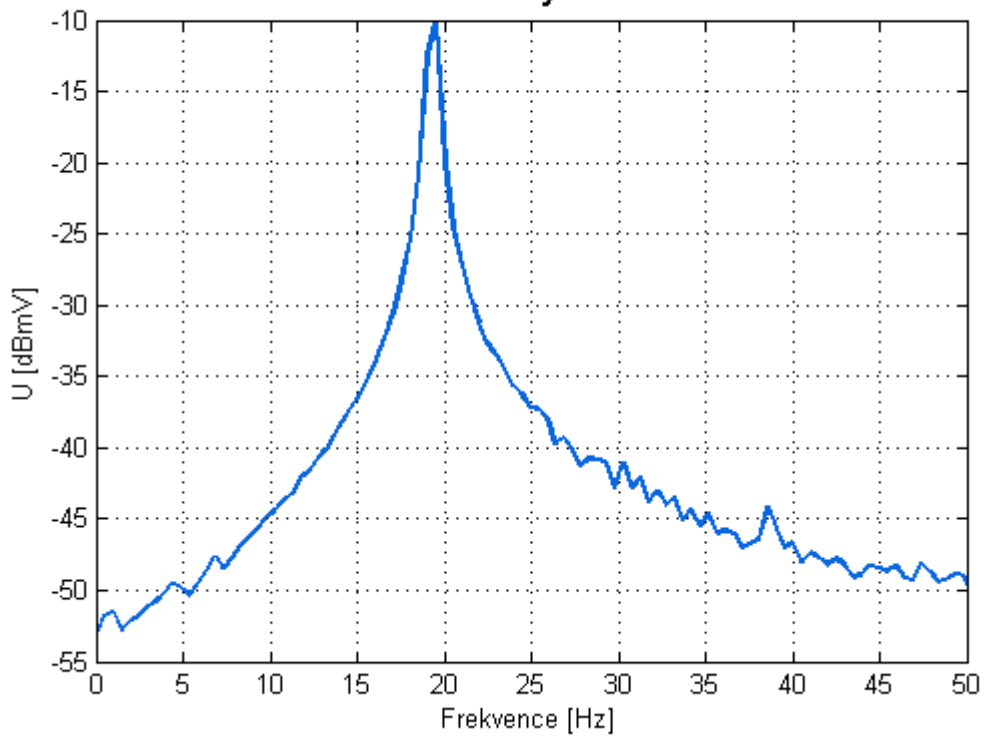


Obrázek 7 - Naměřené hodnoty kmitů nosníku zatíženého maticí 1



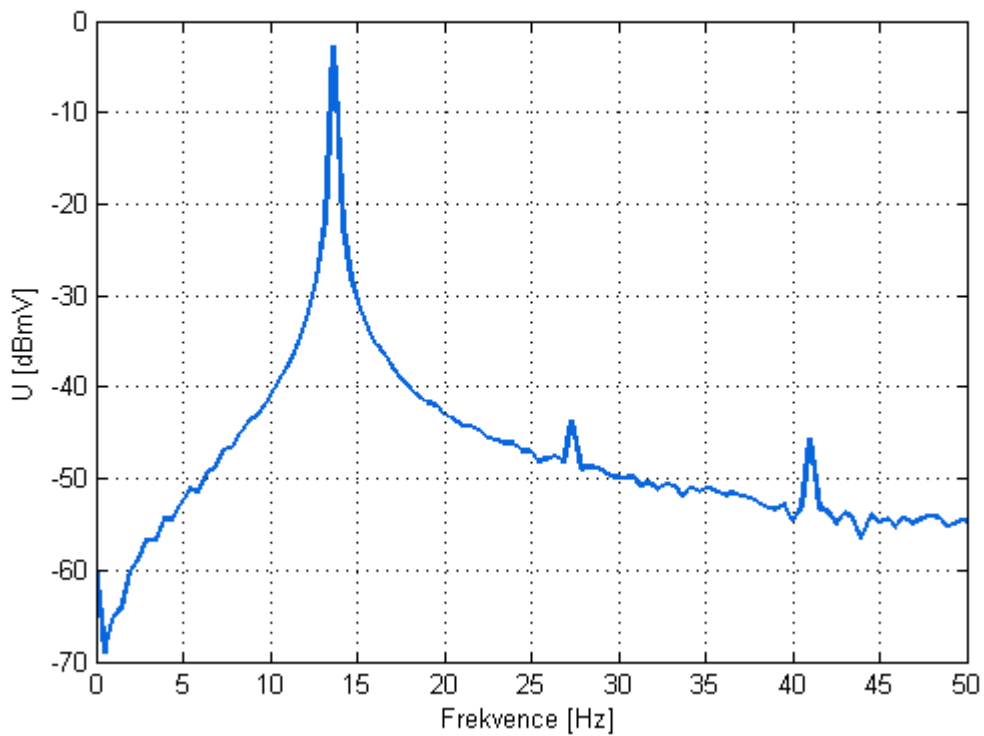
Obrázek 8 - Naměřené hodnoty kmitů nosníku zatíženého maticí 2

Amplitudové frekvenční spektrum nezatížený nosník



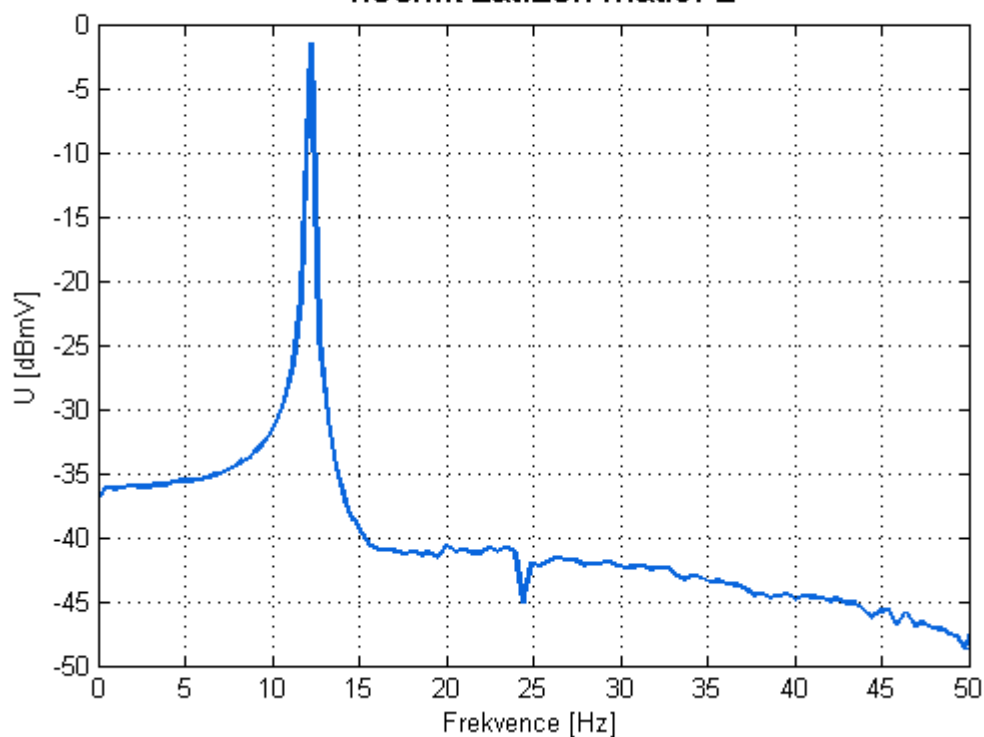
Obrázek 9 - Amplitudové frekvenční spektrum kmitů nezatíženého nosníku

Amplitudové frekvenční spektrum nosník zatížen maticí 1



Obrázek 10 - Amplitudové frekvenční spektrum kmitů nosníku zatíženého maticí 1

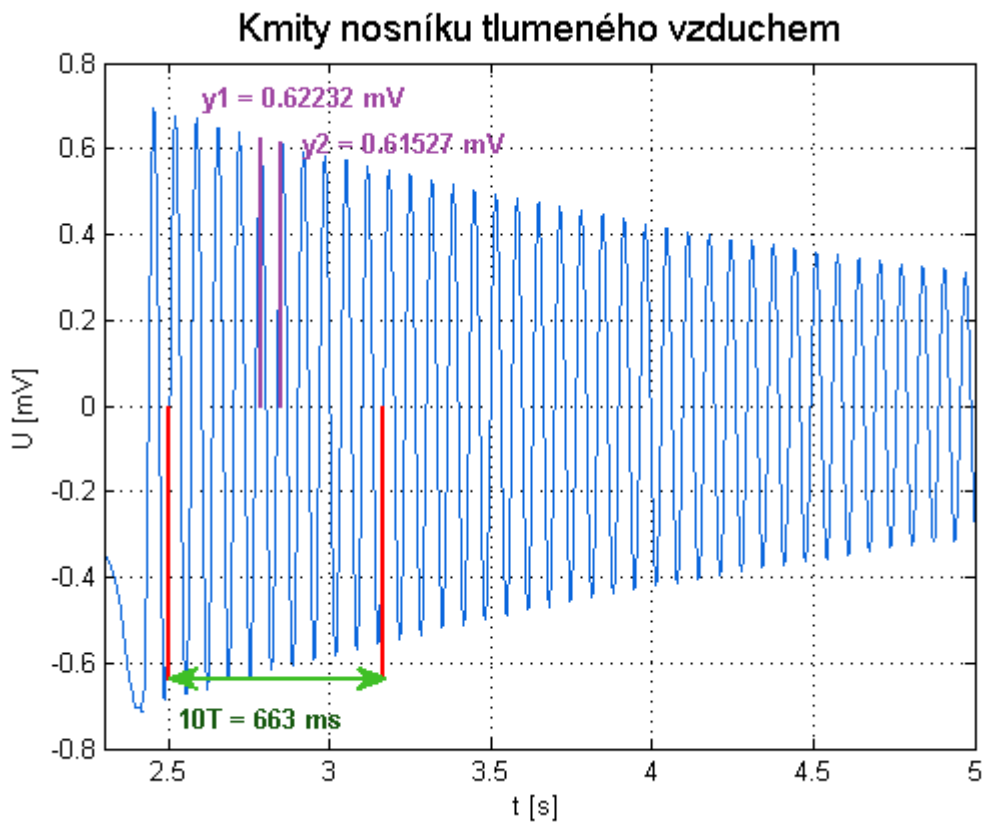
Amplitudové frekvenční spektrum nosník zatížen maticí 2



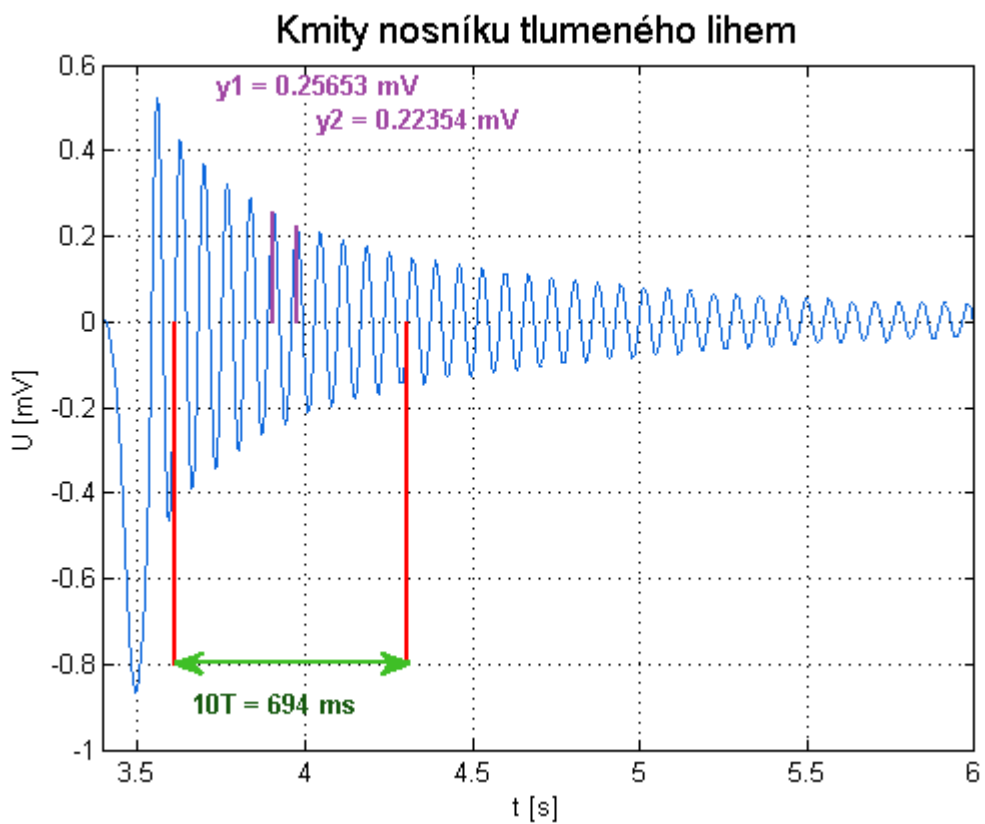
Obrázek 11 - Amplitudové frekvenční spektrum kmitů nosníku zatíženého maticí 2

2.2 Tlumené kmitání

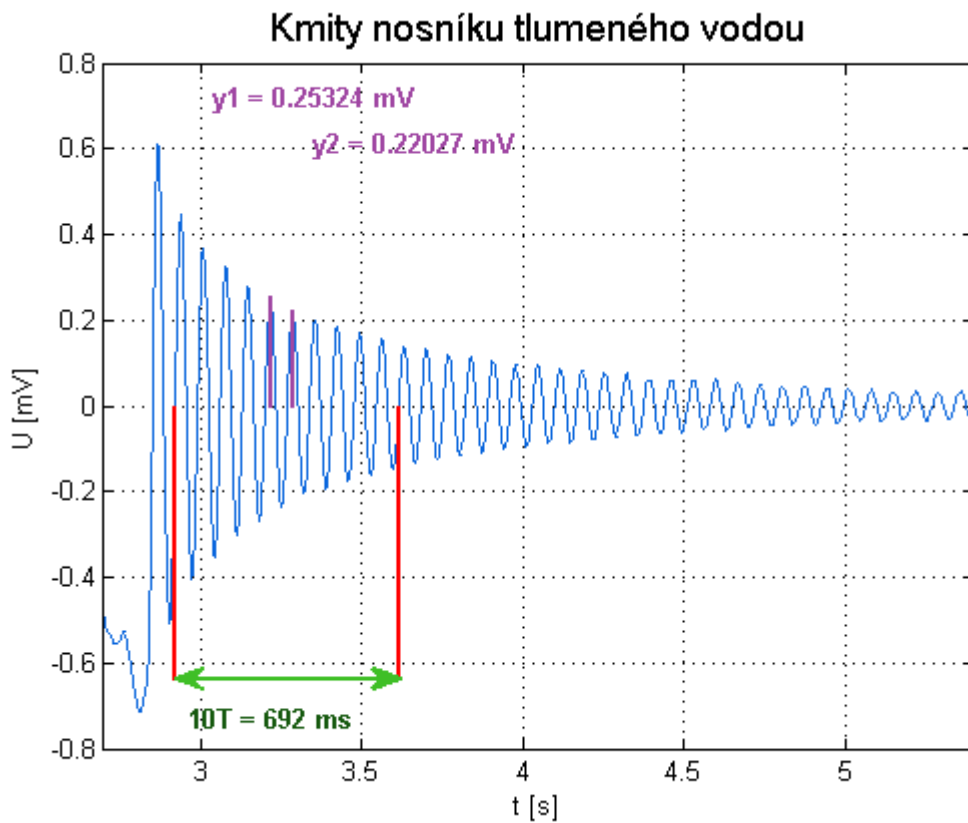
Při měření tlumeného kmitání bylo využito měřicí aparatury dle schématu na obrázku 2. Na volný konec vetknutého nosníku byla pomocí kovové tyčky připevněna destička, která byla postupně ponořována do různých tekutin. Na obrázcích 12 ÷ 15 jsou vyobrazeny naměřené hodnoty kmitů postupně pro tlumení vzduchem, lihem, vodou a tekutým mýdlem. Amplitudová frekvenční spektra pro tato měření jsou následně vynesena v grafech na obrázcích 16 ÷ 19.



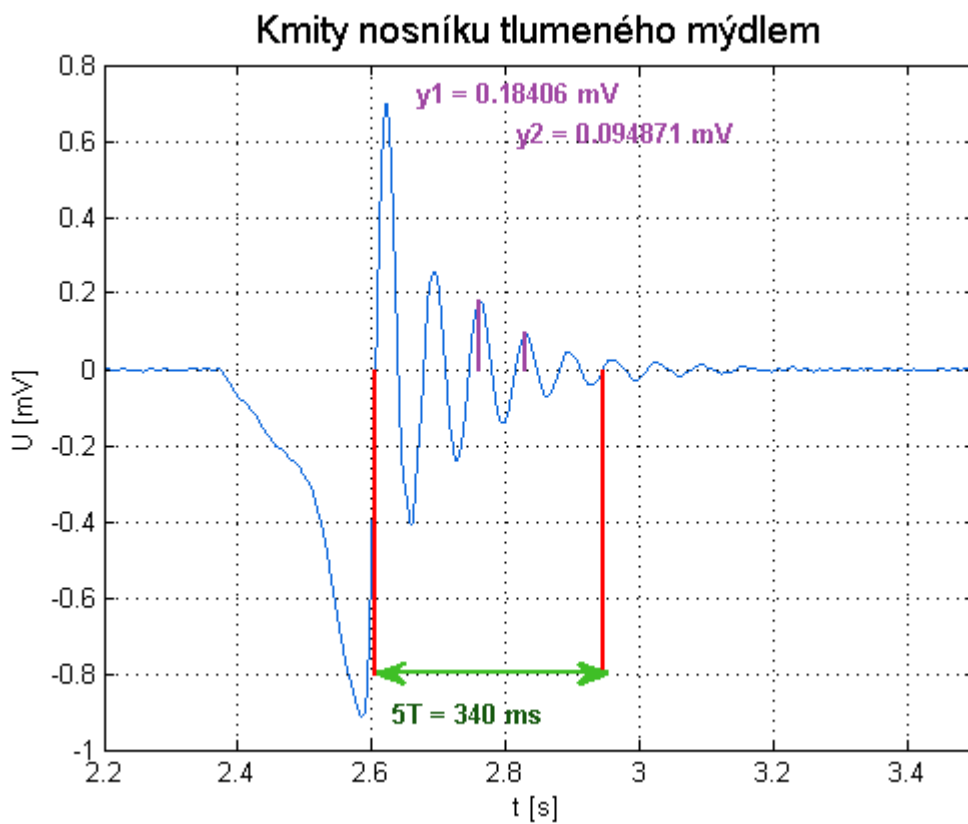
Obrázek 12 - Naměřené hodnoty kmitů nosníku tlumeného vzduchem



Obrázek 13 - Naměřené hodnoty kmitů nosníku tlumeného lihem

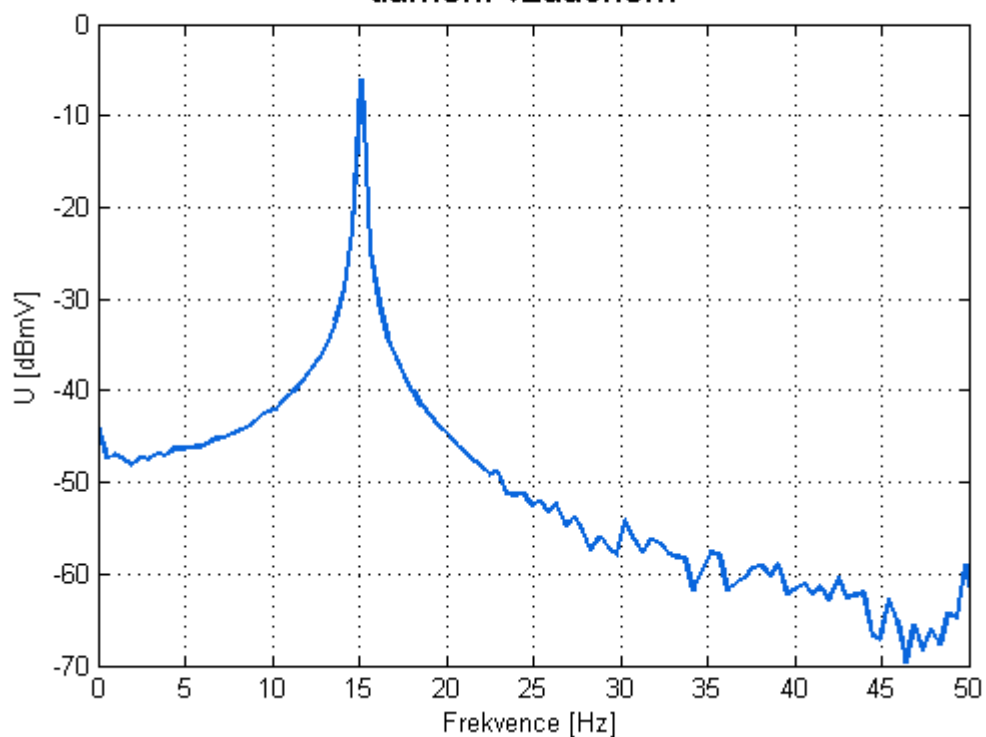


Obrázek 14 - Naměřené hodnoty kmitů nosníku tlumeného vodou



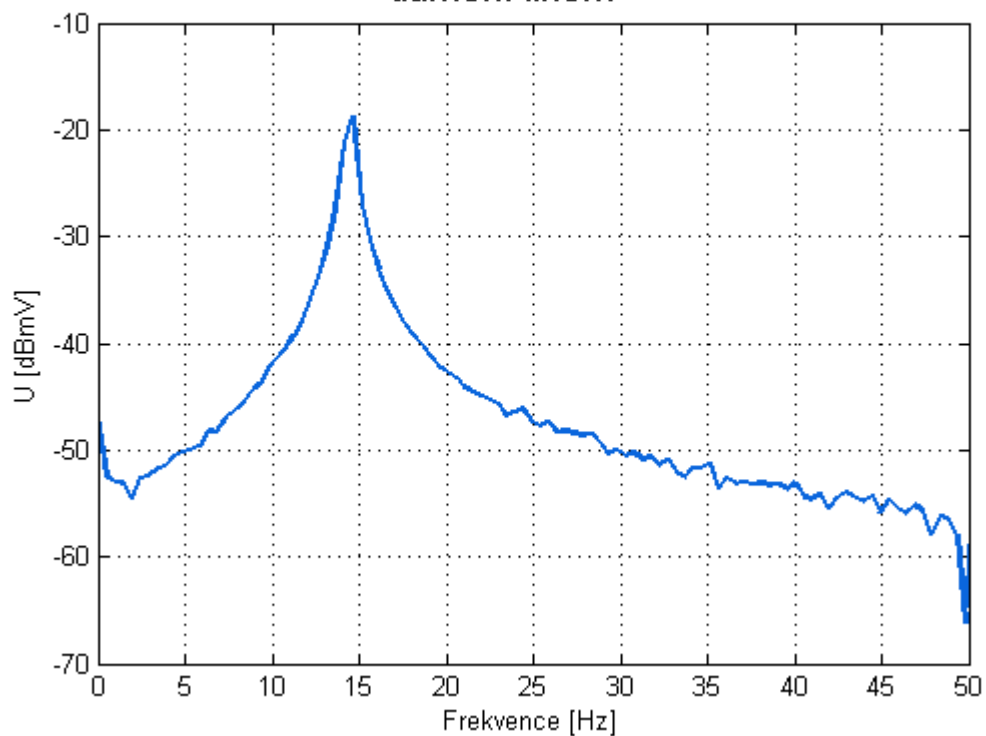
Obrázek 15 - Naměřené hodnoty kmitů nosníku tlumeného tekutým mýdlem

Amplitudové frekvenční spektrum tlumení vzduchem



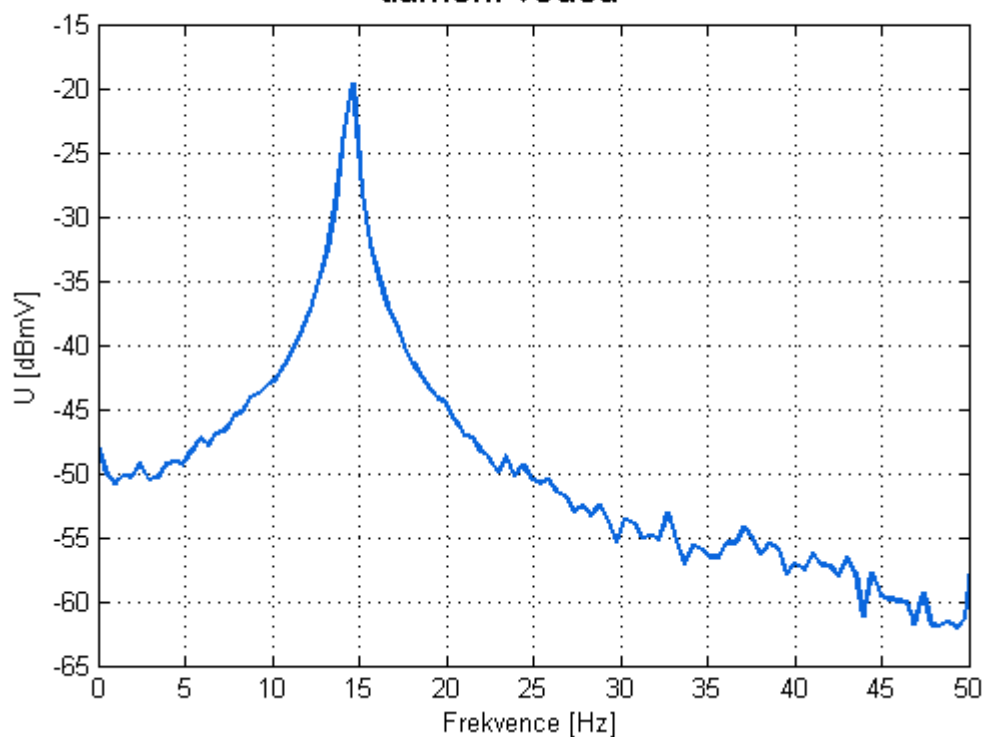
Obrázek 16 - Amplitudové frekvenční spektrum kmitů nosníku tlumeného vzduchem

Amplitudové frekvenční spektrum tlumení lihem



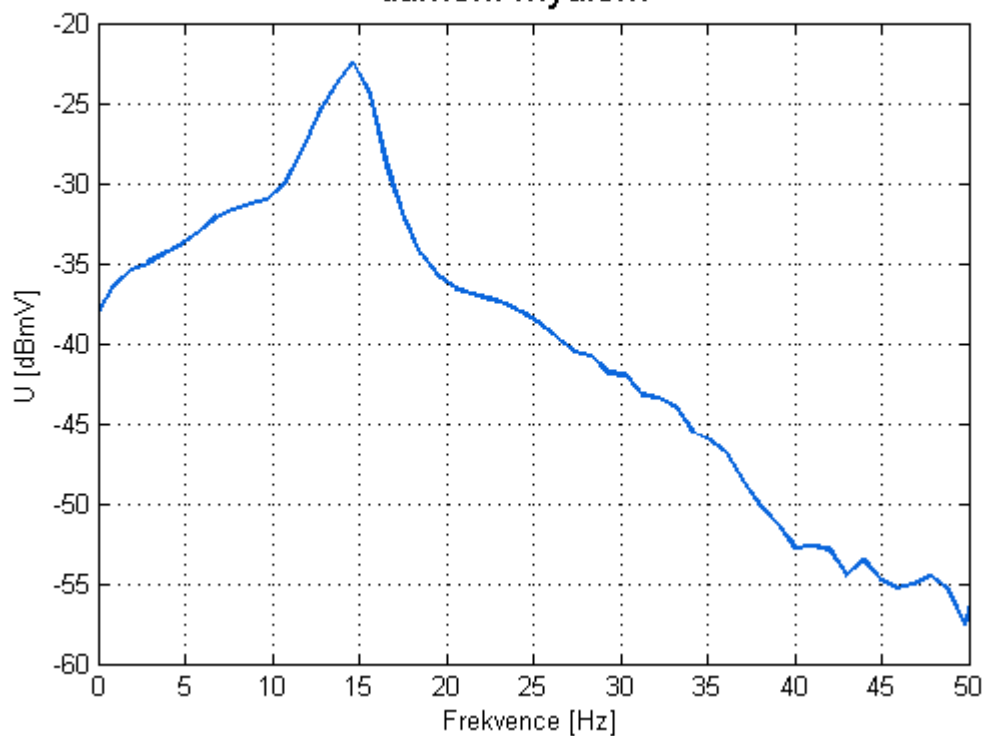
Obrázek 17 - Amplitudové frekvenční spektrum kmitů nosníku tlumeného lihem

Amplitudové frekvenční spektrum tlumení vodou



Obrázek 18 - Amplitudové frekvenční spektrum kmitů nosníku tlumeného vodou

Amplitudové frekvenční spektrum tlumení mýdlem



Obrázek 19 - Amplitudové frekvenční spektrum kmitů nosníku tlumeného tekutým mýdlem

3 Vyhodnocení naměřených dat

Z parametrů elastického přímého prizmatického nosníku, společně se známou hmotností závaží, kterým byl nosník zatěžován, lze dle vztahu (7) určit teoretickou hodnotu vlastní frekvence kmitů systému v případě netlumeného kmitání. Pro ilustraci je v rovnici (11) uveden příklad výpočtu vlastní frekvence kmitání pro zatížení volného konce nosníku maticí 1.

$$f = \sqrt{\frac{E \cdot b \cdot h^3}{16 \cdot \pi^2 \cdot l^3 \cdot (0,24 \cdot \rho \cdot h \cdot b \cdot l + m_z)}} = \quad (11)$$

$$= \sqrt{\frac{210 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 2,014 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot (1,08 \cdot 10^{-3} \text{ m})^3}{16 \cdot \pi^2 \cdot (0,201 \text{ m})^3 \cdot (0,24 \cdot 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 1,08 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 2,014 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 0,201 \text{ m} + 9,92 \cdot 10^{-3} \text{ kg})}}$$

$$f \doteq \underline{\underline{15,15 \text{ Hz}}}$$

Experimentálně je možné stanovit vlastní frekvenci kmitů systému několika způsoby. Jedním z nich je její odečtení z amplitudového frekvenčního spektra. Další možností je měření délky trvání několika period kmitání a následný přepočítání délky jedné periody na frekvenci dle vztahu (8). Pro výše uvedená měření byla měřena délka deseti period pomocí detekce průchodu nulou. Z této doby byla pro každé měření stanovena doba jedné periody a následně přepočítána na frekvenci. Příklad tohoto výpočtu frekvence pro zatížení nosníku maticí 1 je uveden v rovnici (12). Kompletní seznam teoreticky vypočtených a experimentálně zjištěných vlastních frekvencí kmitání je poté uveden v tabulce 2.

$$f = \frac{10}{10T} = \frac{10}{0,731 \text{ s}} \doteq \underline{\underline{13,68 \text{ Hz}}} \quad (12)$$

Tabulka 2 - Srovnání teoreticky vypočtených a experimentálně zjištěných vlastních frekvencí kmitání

Zatížení nosníku	Hmotnost zátěže m_z [g]	Vlastní frekvence kmitání f [Hz]		
		Teoretická	Experimentální (průchody nulou)	Experimentální (spektrum)
Bez zatížení	0	22,53	19,31	19
Matic 1	9,92	15,15	13,68	14
Matic 2	15,16	13,34	12,18	12

Míru shody experimentálně zjištěné vlastní frekvence kmitání s teoreticky vypočtenou je možné vyjádřit relativní odchylkou δ'_f , kterou lze vypočítat dle vztahu (13), kde f_t je teoretická hodnota frekvence a f_e experimentálně zjištěná frekvence. Příklad výpočtu relativní odchylky pro kmity nosníku zatíženého maticí 1 je uveden v rovnici (14). Kompletní přehled relativních odchylek experimentálně určených frekvencí pro obě metody je uveden v tabulce 3.

$$\delta'_f = \frac{f_e - f_t}{f_t} \quad (13)$$

$$\delta'_f = \frac{f_e - f_t}{f_t} \cdot 100[\%] = \frac{13,68\text{Hz} - 15,15\text{Hz}}{15,15\text{Hz}} \cdot 100[\%] = \underline{\underline{-9,70\%}} \quad (14)$$

Tabulka 3 - Přehled relativních odchylek experimentálně zjištěných vlastních frekvencí kmitů nosníku

Zatížení nosníku	Relativní odchylka δ'_f [%]	
	Průchody nulou	Odečet se spektra
Bez zatížení	-14,29	-15,67
Matice 1	-9,70	-7,59
Matice 2	-8,70	-10,04

V případě tlumeného kmitání lze opět experimentálně určit vlastní frekvenci kmitání systému, stejně jako v předchozím případě. Dále je však možné stanovit i koeficient tlumení δ ze vztahů (9) a (10). Díky tomu, že naměřený signál z odporových tenzometrů je přímo úměrný výchylce volného konce nosníku, lze pro výpočet využít přímo napěťové amplitudy měřeného signálu. Příklad výpočtu pro tlumení systému pohybem destičky v lihu je uveden v rovnici (15). Kompletní seznam experimentálně zjištěných vlastních frekvencí kmitání a koeficientů tlumení pro různé tekutiny je poté uveden v tabulce 4.

$$\delta = \frac{\ln \frac{y_1}{y_2}}{T_D} = \frac{\ln \frac{0,25653\text{mV}}{0,22354\text{mV}}}{69,4\text{ms}} \doteq \underline{\underline{1,984\text{s}^{-1}}} \quad (15)$$

Tabulka 4 - Přehled experimentálně zjištěných vlastních frekvencí a koeficientů tlumení kmitů nosníku

Tlumič tekutina	Vlastní frekvence kmitání f [Hz]		Koeficient tlumení δ [s^{-1}]
	Experimentální (průchody nulou)	Experimentální (spektrum)	
Vzduch	15,08	15	0,172
Lih	14,41	15	1,984
Voda	14,45	15	2,016
Tekuté mýdlo	14,71	15	9,746

4 Závěr

Z porovnání jednotlivých relativních odchylek vlastních frekvencí nosníku pro netlumené kmitání je patrné, že reálná frekvence byla v průměru přibližně o 10 % nižší, než teoreticky vypočtená. Tento rozdíl je pravděpodobně způsoben nedokonalým vetknutím nosníku, kdy docházelo ke kmitům vlastní podpěry, ve které byl nosník vetknut. To způsobilo změnu tuhosti a hmotnosti celého systému. Ze srovnání experimentálně zjištěných hodnot frekvencí kmitů nosníku je navíc zřejmé, že metoda využívající měření doby mezi průchody nulou podává přesnější výsledky, než odečet z amplitudového frekvenčního spektra. Tento fakt je nejvíce viditelný při určení frekvence tlumených kmitů nosníku.

U tlumených kmitů nosníku byl pozorován mírný pokles jejich frekvence, avšak rozdíly mezi nimi byly téměř neměřitelné. Vzhledem k nemalé chybě měření, kdy je možné stanovit periodu kmitů pouze s přesností na desetiny milisekund, nelze tento pokles jednoznačně určit. V případě tlumených kmitů byly dále stanoveny koeficienty tlumení pro jednotlivé tekutiny. Z nich je patrné, že čím vyšší viskozitu má daná tekutina, tím vyšší bude tento koeficient. Nejvyšší hodnota koeficientu tlumení byla naměřena pro tekuté mýdlo ($9,746 \text{ s}^{-1}$) a naopak nejnižší pro vzduch ($0,172 \text{ s}^{-1}$).