7. lekce

Měření mechanického kmitání

Obsah:

7.1 – Úvod

Periodický charakter práce většiny strojů vede k periodickému zatěžování a deformování jak jednotlivých částí strojů, tak i konstrukcí, které vytvářejí základy těchto strojů. Pro měření mechanického kmitání se často používají snímače, které lze z hlediska mechaniky považovat za soustavu se setrvačnou hmotou, pružinou a případným viskózním tlumičem.

V této lekci zaměříme pozornost na soustavy bez tlumení.

7.2 – Setrvačná soustava se šroubovými pružinami

Na obr. 7.1 jsou uvedeny soustavy s lineárními válcovými šroubovými pružinami jejichž rezonanční kmitočet je:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3}m_p}} \qquad (7.1)$$

kde k je tuhost pružiny a m_p je hmotnost pružiny. Tuhost k vinuté šroubové pružiny lze stanovit ze vztahu

$$k = \frac{G \cdot d^4}{8n \cdot D^3} \qquad (7.2)$$

kde *G* je modul pružnosti v krutu,

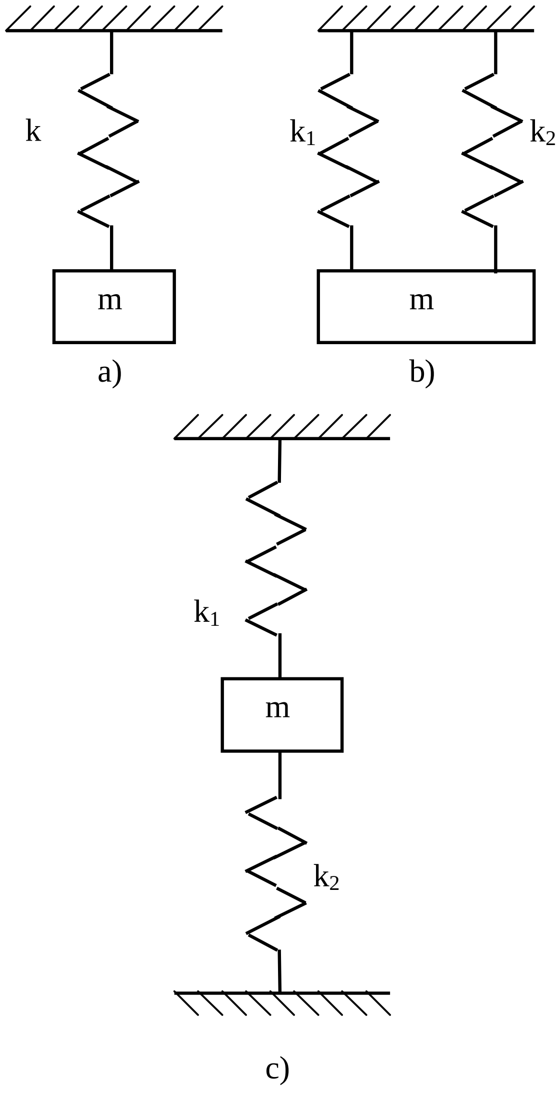
d je průměr drátu pružiny,

n je počet činných závitů pružiny,

D je průměr pružiny.

Na obr. 7.1 b jsou uvedeny 2 pružiny paralelně připojené k hmotě *m*. Výsledná tuhost je dána vztahem:

$$k = k_1 + k_2 \quad . \qquad (7.3)$$



Obr. 7.1

Na obr. 7.1 c jsou uvedeny 2 pružiny sériově připojené k hmotě m. Výsledná tuhost je dána vztahem

$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} \quad . \qquad (7.4)$$

Rezonanční kmitočet samotné šroubové pružiny je:

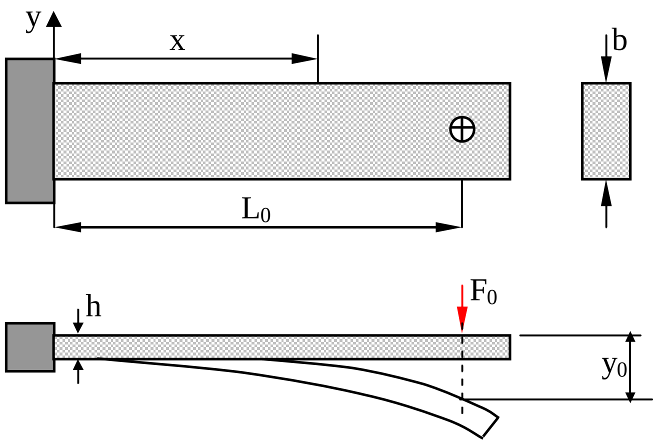
$$f_0 = \frac{d}{4pn \cdot D^2} \sqrt{\frac{G \cdot g}{2\,r}} \quad , \tag{7.5}$$

kde g je tíhové zrychlení

r je měrná hmotnost materiálu pružiny.

7.3 – Setrvačná soustava s jednou plochou pružinou

Měřicí soustavu jazýčkových kmitočtoměrů tvoří jednostranně vetknutý nosník se setrvačnou přídavnou hmotu na volném konci (viz obr.7.2). Ukažme si dále nalezení vlastní frekvence nosníku, který je uveden na obr. 7.2. Při řešení úlohy zanedbejme veškerý útlum.



Obr. 7.2

Ohybový moment M v místě x je dán vztahem:

$$M(x) = -F_0 \cdot L_0 + F_0 \cdot x \tag{7.6}$$

kde L_0 je vzdálenost místa působiště síly F_0 od místa vetknutí nosníku. Průhyb tohoto nosníku je vlivem síly F_0 dán:

$$EJ\,\frac{d^2 y}{dx^2} = -F_0 \cdot L_0 + F_0 \cdot x \tag{7.7}$$

Integrací, a s uvážením okrajových podmínek pro místo vetknutí, obdržíme rovnici průhybové čáry ve tvaru:

$$y = \frac{F_0}{EJ} \cdot \left(-\frac{L_0 x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \tag{7.8}$$

Posunutí y_0 v místě působení síly F_0 $(x=L_0)$ je dáno vztahem

$$y_0 = \frac{F_0 \cdot L_0^{\,3}}{3EJ} \tag{7.9}$$

Uvážíme-li, že moment setrvačnosti J pro průřez zkoumaného nosníku je

$$J = \frac{1}{12} bh^3 \quad , \tag{7.10}$$

pak

$$F_0 = \frac{E\,b\,h^3}{4 \cdot L_0^{\,3}} \cdot y_0 \quad , \tag{7.11}$$

tj.

$$F_0 = k \cdot y_0 \ ,$$

kde

$$k = \frac{E\,b\,h^3}{4L_0^{\,3}} \tag{7.12}$$

je redukovaná tuhost uvažovaného vetknutého nosníku v místě působení síly F_0.

Maximální potenciální energie akumulovaná v daném nosníku je pro y_0 Î $<0;y_{max}>$ dána vztahem:

$$U_{\max} = \int_0^{y_{\max}} F_0 d\, y_0 = \int_0^{y_{\max}} \frac{E\,b\,h^3}{4L_0^{\,3}} \cdot y_0 \cdot dy_0 = \frac{E\,b\,h^3}{8L_0^{\,3}} \cdot y^2{}_{\max} \tag{7.13}$$

Kinetická energie spojená s kmitajícím nosníkem je dána hmotou <u>m</u> umístěnou v místě L_0 a rychlostí $v = dy_0 / dt$, kterou se hmota <u>m</u> pohybuje.

Tj.

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy_0}{dt} \right)^2 . \tag{7.14}$$

V případě volného harmonického pohybu lze psát:

$$y_0 = y_{\max} \cdot \cos(wt)$$

$$\frac{dy_0}{dt} = -w\, y_{\max} \cdot \sin(wt) \tag{7.15}$$

Maximální rychlost je dosahována 2x za každý cyklus, a to při úhlu *p/2* a *3p/2*.

Tedy

$$v_{\max} = \pm w \cdot y_{\max} \quad , \tag{7.16}$$

kde *w* je úhlová rychlost v radiánech. Frekvence oscilací je:

$$f = \frac{w}{2p} \quad .$$

Lze psát:

$$v_{\max} = \pm 2pf \cdot y_{\max} \quad , \tag{7.17}$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m v^2{}_{\max} = \frac{1}{2} m \left(2p\ f\ y_{\max} \right)^2 \quad . \tag{7.18}$$

Kmity si lze představit jako opakovaný přenos určitého množství energie z hmoty <u>*m*</u> na deformovaný nosník. Když je nosník maximálně prohnut, hmota se na okamžik zastaví a kinetická energie zanikne. V tomto okamžiku je všechna energie systému uložena v pružině ve formě potenciální energie. Když hmota prochází bodem $y_0=0$, má maximální rychlost a její pohyb soustřeďuje všechnu energii systému, neboť nosník není deformován. V ostatních bodech cyklu se mění poměr kinetické energie k potenciální, ale jejich součet je vždy konstantní. Jestliže nedochází v průběhu kmitání uvedeného nosníku ke ztrátám, pak platí:

$$U_{\max} = T_{\max} \ .$$

Tj.

$$\frac{E\, b\, h^3}{8 L_0{}^3} y^2{}_{\max} = \frac{1}{2} m \left(2p \cdot f \cdot y_{\max} \right)^2 \quad .$$

Odtud vlastní frekvence je:

$$f = \frac{1}{2p} \cdot \sqrt{\frac{E\, b\, h^3}{4 m L_0{}^3}} = \frac{1}{2p} \cdot \sqrt{\frac{k_r}{m}} \quad . \tag{7.19}$$

Perioda *T* vibrací je:

$$T = \frac{2p}{w} = \frac{1}{f} = 2p \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{k_r}{m}}} \quad . \qquad (7.20)$$

Jestliže pohyb hmoty *m* v místě $x = L_0$ je harmonický a nedochází ke ztrátám energie, pak vztah (7.19) resp. (7.20) ukazuje, že vetknutý nosník kmitá s frekvencí určenou jeho ***modulem pružnosti*** (vlastnost materiálu), ***geometrií*** (b, h, L_0) a ***aplikovanou hmotou***.