4. lekce

Měření napjatosti na povrchu tělesa

Tenkostěnná trubka zatížená krutem a vnitřním přetlakem

Obsah:

4.1 – Úvod

V předchozích lekcích jsme ukázali na možnost měření jednoosé napjatosti v dlouhých tenkých prutech namáhaných tahem, tlakem a ohybem. V této lekci si ukážeme základní pojmy potřebné pro měření rovinné napjatosti na povrchu tenkostěnné trubky namáhané krutem a vnitřním přetlakem. Je vhodné zdůraznit, že mnohé dále uvedené pojmy a vztahy mají obecnou platnost a nevztahují se pouze na tenkostěnnou trubku.

4.2 – Krut tenkostěnné válcové trubky

Na obrázku 4.1 je uvedena tenkostěnná trubka namáhaná kroutícím momentem M_K (N.m).Tento torzní moment je vyvolán dvojicí sil F. Experimentálně je prokázáno že řezy kolmé k podélné ose trubky zůstávají kolmými i po zatížení trubky. Řezy se vlivem deformace trubky pouze vzájemně natočí. Vnitřní síly v řezu vedou ke vzniku smykových napětí τ. Pro tenkostěnnou trubku lze psát následující rovnici rovnováhy vnitřních a vnějších krouticích momentů.

$$2 \cdot p \cdot h \cdot r_s t \cdot r_s = M_K \qquad (4.1a)$$

$r_s = r + \frac{h}{2}$, kde r_s je střední poloměr.

Odtud obdržíme vztah mezi vnějším kroutícím momentem M_K a smykovým napětím:

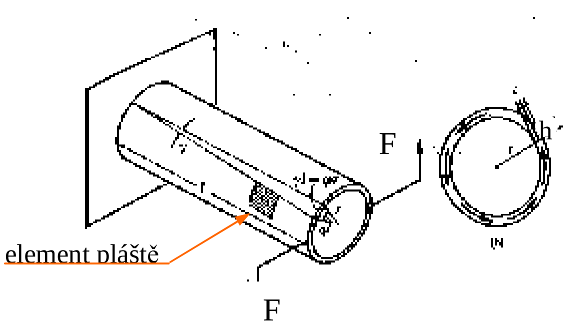
$$t = \frac{M_K}{2p \cdot h \cdot r_s^2} \qquad (4.1b)$$

Kroutící moment vyvolává zkroucení trubky, přičemž povrchová přímka se po deformaci změní ve šroubovici. Z obrázku je patrný vztah mezi natočením φ průřezu a natočením γ povrchové přímky. tj.

$$g \cdot l = j \cdot r$$

Odtud (4.2)

$$g = j \cdot \frac{r}{l}$$



Obr 4.1

Natočení povrchové přímky vlivem zatížení trubky kroutícím momentem je označováno jako *zkos.* Vztah mezi smykovým napětím a *zkosem* pro lineární elastické těleso je dán Hookovým zákonem pro smyk. tj.

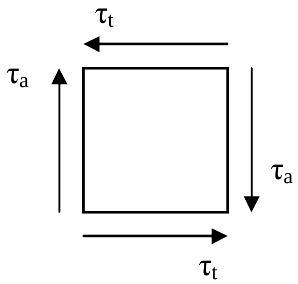
$$t = G \cdot g \tag{4.3}$$

Veličina G v předchozím vztahu je ***modul pružnosti ve smyku*** a má rozměr napětí, tj. MPa. V 1. lekci byly pro lineární elastické těleso zavedeny dvě materiálové konstanty, a to Youngův modul pružnosti E a Poissonovo číslo υ. Lze ukázat, že modul pružnosti ve smyku je možné vyjádřit prostřednictvím modulu pružnosti E a Poissonova čísla υ , a to následujícím vztahem :

$$G = \frac{E}{2(1+u)} \tag{4.4}$$

Vyjměme z trubky element, který je na obrázku 4.1 vyšrafován. U momentové podmínky rovnováhy tohoto elementu vyplývá tzv. ***pravidlo o sdružených smykových napětí***, které ukazuje, že smyková napětí na dvou vzájemně kolmých ploškách jsou stejně velká, ale opačného znaménka (obr. 4.2).

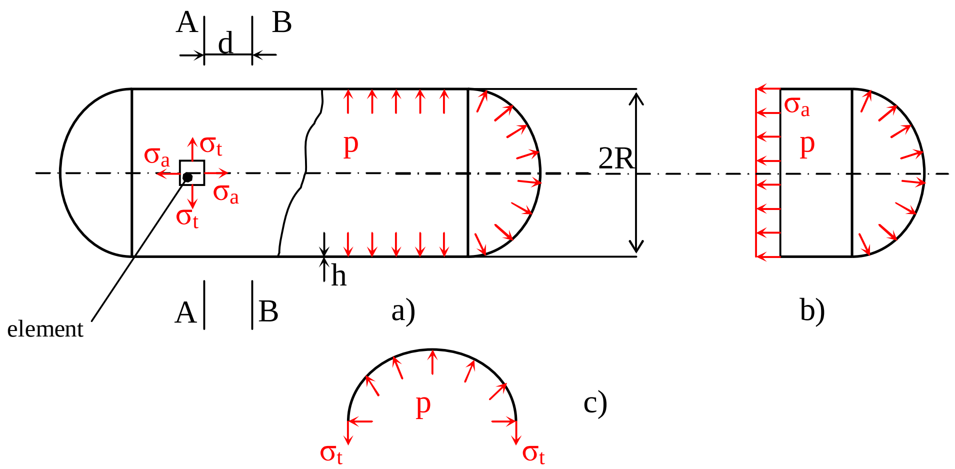
$$t_a = t_t = t$$



Obr. 4.2

4.3 – Tenkostěnná tlaková válcová nádoba

Na obrázku 4.3 je schematicky uvedena tenkostěnná tlaková nádoba namáhaná vnitřním přetlakem *p*. Při rozboru napjatosti se omezíme na místa pláště dostatečně vzdálená od čel nádoby.



Obr. 4.3

Rovnice rovnováhy, oddělíme-li části nádoby (obr. 4.3b), je následující :

$$s_a \cdot 2p \cdot R \cdot h - p \cdot pR^2 = 0$$

Odtud

$$s_a = \frac{p \cdot R}{2h} \tag{4.5}$$

Rovnice rovnováhy rozříznutého prstýnku šířky *d* (obr 4.3c) je

$$2s_t \cdot h \cdot d = p \cdot 2R \cdot d$$

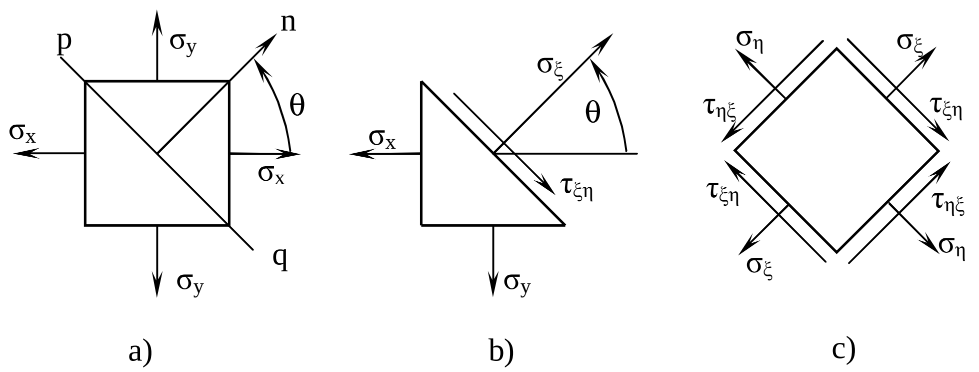
Odtud

$$s_t = \frac{p \cdot R}{h} \tag{4.6}$$

4.4 – Dvouosá napjatost – Mohrova kružnice

Příkladem dvouosé napjatosti je napjatost tenkostěnné trubky namáhané vnitřním přetlakem resp. krutem. Takováto napjatost se vyskytuje i u dalších strojních součástí, jako jsou desky a hřídele. Dvouosá napjatost je zvláštním případem rovinné napjatosti. Rovinnou napjatostí se budeme podrobněji zabývat v 5-té lekci.

Na elementu tenkostěnné nádoby jsme označili normálové napětí ve směru osy indexem *a* (axiální směr). V obvodovém směru byl užit index *t* (tangenciální směr). Označme pro větší obecnost směr *a* jako směr *x*. Obdobně označme směr *t* jako směr *y*. Element vyjmutý z pláště nádoby je s novým označením směrů normálových napětí uveden na obr.4.4a. Poznamenejme, že index ukazuje směr normály k rovině řezu *pq*, druhý index u smykového napětí ukazuje směr jeho působení.



Obr. 4.4

Určeme nyní normálové napětí σ_ξ a tečné napětí $\tau_{\xi\eta}$ na ploše řezu *pq* (obr. 4.4 b). Z rovnic rovnováhy trojúhelníkového elementu (viz. obr.4.4b) po úpravě obdržíme následující vztahy:

$$s_x = \frac{1}{2}(s_x + s_y) + \frac{1}{2}(s_x - s_y)\cos 2q \;, \tag{4.7}$$

$$t_{xh} = \frac{1}{2}(s_x - s_y)\sin 2q \;. \tag{4.8}$$

Zaměníme-li ve vztazích (4.2) úhel θ za $\theta + \pi/2$, dostaneme napětí σ_η , $\tau_{\eta\xi}$ působící na ploškách s normálou η (obr.4.4c). Platí

$$\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta \quad . \tag{4.9}$$

$$\tau_{\eta\xi} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta \quad . \tag{4.10}$$

Součet rovnic (4.7) a (4.9) dává vztah

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y \ , \tag{4.11}$$

podle kterého je součet normálných napětí na dvou vzájemně kolmých ploškách konstantní. Z rovnic (4.8) a (4.10) dostaneme vztah

$$\tau_{\xi\eta} = -\tau_{\eta\xi} \quad , \tag{4.12}$$

který ukazuje, že smyková napětí na dvou vzájemně kolmých ploškách jsou stejně velká, ale opačného znaménka (pravidlo sdružených smykových napětí).

Smyková napětí $\tau_{\xi\eta}$ jsou nulová, je-li $\theta = 0$ a maximální, je-li $\theta = \pi/4$. V tom případě je

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \quad . \tag{4.13}$$

Napětí σ_x , σ_y jsou tzv. hlavní normálná napětí, zpravidla označovaná σ_1 , σ_2 . Jak je zřejmé z obr. 4.4, na ploškách, kde působí napětí σ_x , σ_y se nevyskytují smyková napětí. Jsou-li σ_x a σ_y stejná, nebude se vyskytovat smykové napětí na žádné ploše elementu.

<u>Mohrova kružnice pro dvouosou napjatost</u>

Označme ve vztazích 4.7 až 4.10

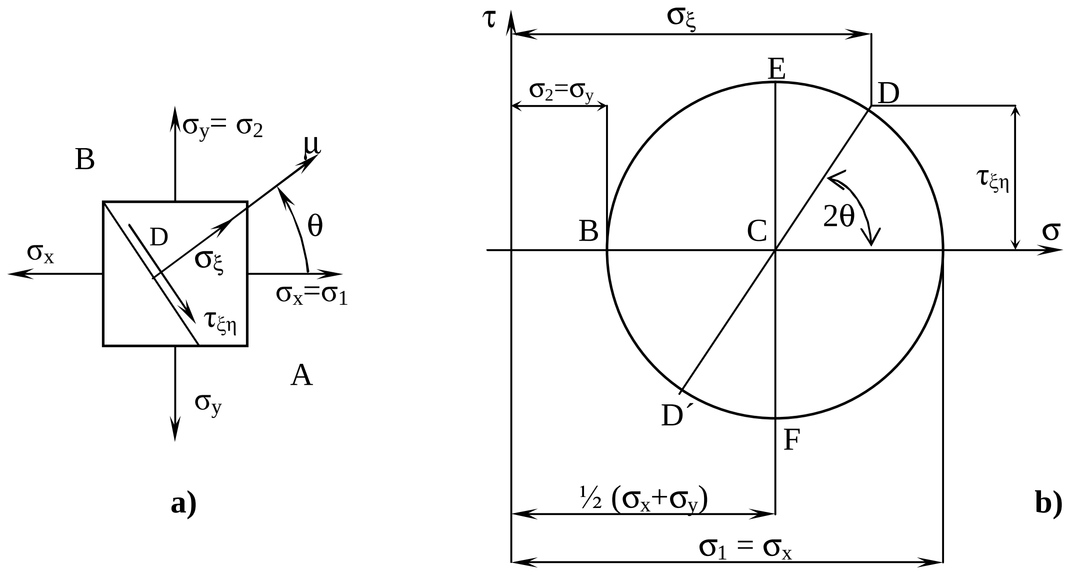
$$\sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{4.14}$$

Uvážíme-li vztah (4.13), pak vztahy (4.7) a (4.8) lze přepsat do tvaru

$$\sigma_\xi - \sigma_s = \tau_{\max} \cdot \cos 2\theta \tag{4.15a}$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\tau_{\max} \cdot \sin 2\theta \tag{4.15b}$$

Vyloučíme-li z předchozích vztahů parametr 2θ obdržíme rovnici kružnice s nezávislými proměnnými σ_ξ a $\tau_{\xi\eta}$. Tato kružnice je znázorněna na obrázku (4.5).



Obr. 4.5

4.5 – Deformace při dvouosé napjatosti –Hookův zákon

Vraťme se k napjatosti tenkostěnné nádoby zatížené vnitřním přetlakem *p*. Deformace v axiálním směru ε_a závisí zřejmě na obou složkách napětí σ_a , σ_t . Působí-li každé z těchto napětí zvlášť, bude axiální deformace ε_a dána superpozicí jejich účinků. Obdobně toto tvrzení platí pro obvodovou (tangenciální) deformaci ε_t. tj.

$$e_a = \frac{1}{E}\left[s_a - u \cdot s_t\right] \ , \tag{4.16a}$$

$$e_t = \frac{1}{E}\left[s_t - u \cdot s_a\right] \ . \tag{4.16b}$$

Poměrná změna tloušťky stěny nádoby je pak dána vztahem

$$e_r = -\frac{u}{E}\left[s_a + s_t\right] \ . \tag{4.16c}$$

Z rovnic (4.16a) a (4.16b) lze vyjádřit napětí σ_a , σ_t prostřednictvím deformací ε_a , ε_t. tj.

$$s_a = \frac{E}{1-u^2}\left(e_a + u \cdot e_t\right) \ , \tag{4.17a}$$

$$s_t = \frac{E}{1-u^2}\left(e_t + u \cdot e_a\right) \ . \tag{4.17b}$$