



2. lekce

Měření malých deformací prostřednictvím odporových tenzometrů

Obsah:

2.1 – Úvod	2
2.2 – Odporové tenzometry metalické	2
2.3 – Cejchování deformačního součinitele prostým ohybem	3
2.4 – Měření malých odporových změn tenzometrického snímače deformace	7
2.4.1 Můstkové zapojení	7
2.4.2 Můstek napájený střídavým proudem	9
2.4.3 Můstek jako dělič napětí	9

2.1 – Úvod

Odporové tenzometry jsou typem snímače pro zjišťování poměrných deformací založených na měření zprostředkující veličiny. Využívá se zde vlastností, že elektrický odpor vodiče se mění, jestliže vodič vykáže deformaci. Skutečnost, že některá kovová vlákna mění svůj odpor vlivem deformace, byla poprvé publikována v roce 1856 skotským matematikem a fyzikem Williamem Thomsonem, lordem Kelvinem (1824-1907). Tento jev lze kvantifikovat prostřednictvím poměru relativní změny odporu ku relativní změně délky deformovaného snímače, tj.

$$G = \frac{\frac{dR}{R}}{\frac{dL}{L}} = \frac{dR}{e_L} ,$$

kde R je počáteční odpor, L je počáteční délka a e_L je poměrná deformace. Veličina G je často označována jako „gage – faktor“, resp. deformační součinitel k_d .

2.2 – Odporové tenzometry metalické

Vztah mezi změnou délky a změnou odporu vodiče.

Odpor vodiče je funkcí tří proměnných:

$$R = r \cdot \frac{L}{A}$$

kde R je ohmický odpor vodiče, r je specifický odpor materiálu vodiče, L je délka vodiče, A je plocha příčného průřezu vodiče. Malé změny odporu vodiče jsou vyvolány změnou všech tří veličin při deformaci vodiče, tj.

$$dR = \frac{r}{A} \cdot dL - \frac{r \cdot L}{A^2} dA + \frac{L}{A} \cdot dr$$

Jednoduchou úpravou rov. (2.3) obdržíme vztah pro relativní změnu deformovaného vodiče v následujícím tvaru:

$$\frac{dR}{R} = \left[\frac{dL}{L} - \frac{dA}{A} \right] + \frac{dr}{r}$$

Uvážíme-li pro jednoduchost kruhový příčný průřez vodiče, pak pro změnu plochy průřezu vodiče lze psát:

$$dA = 2pr \cdot dr$$

kde r je počáteční poloměr průřezu vodiče. Prostřednictvím výše uvedených rovnic lze psát:

$$\frac{dR}{R} = [e_L - 2e_r] + \frac{dr}{r}$$

kde $e_L = \frac{dL}{L}$ je podélná a $e_r = \frac{dr}{r}$ je příčná deformace vodiče.

Vztah mezi e_L a e_r je dán Poissonovým číslem μ , tj.

$$e_r = -\mu \cdot e_L$$

Po úpravě obdržíme:

$$\frac{dR}{R} = \left(1 + 2m + \frac{1}{e_L} \cdot \frac{dr}{r} \right) \cdot e_L$$

Porovnáním rov. (2.8) s rovnicí (2.1) obdržíme následující vyjádření pro deformační součinitel k_d , tj.

$$k_d = 1 + 2m + \frac{1}{e_L} \cdot \frac{dr}{r}$$

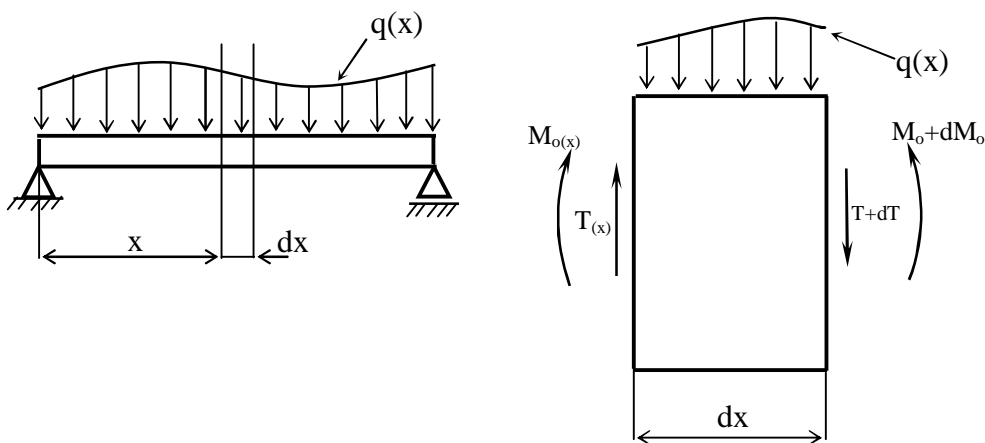
Je patrné, že velikost součinitele k_d je závislá na materiálu (Poissonovo číslo m , odpor r), ale i na okamžité hodnotě podélné poměrné deformace e_L vodiče. Závislost změny odporu na deformaci nemusí být lineární a skutečně, uvažujeme-li větší oblasti deformací, je k_d přibližně konstantní jen u některých kovů a slitin.

2.3 – Cejchování deformačního součinitele prostým ohybem

Vzhledem ke složité podstatě deformačního součinitele snímače je vhodné stanovit tento součinitel experimentálně na hotovém snímači. V případě tělesa snímače ve tvaru dlouhého tenkého pásku se obvykle používá zkušebního zařízení založeného na principu nosníku zatíženého prostým ohybem. Prostřednictvím metod technické pružnosti věnujme v následující části pozornost ohybu přímého nosníku s konstantním příčným průřezem.

Deformace a napjatost vláken dlouhého přímého nosníku při prostém ohybu.

Každý průřez ohýbaného nosníku přenáší ohybový moment M_0 a posouvající sílu T (viz obr. 2.1). Průběh ohybového momentu a posouvající síly vyšetříme metodou myšleného řezu.

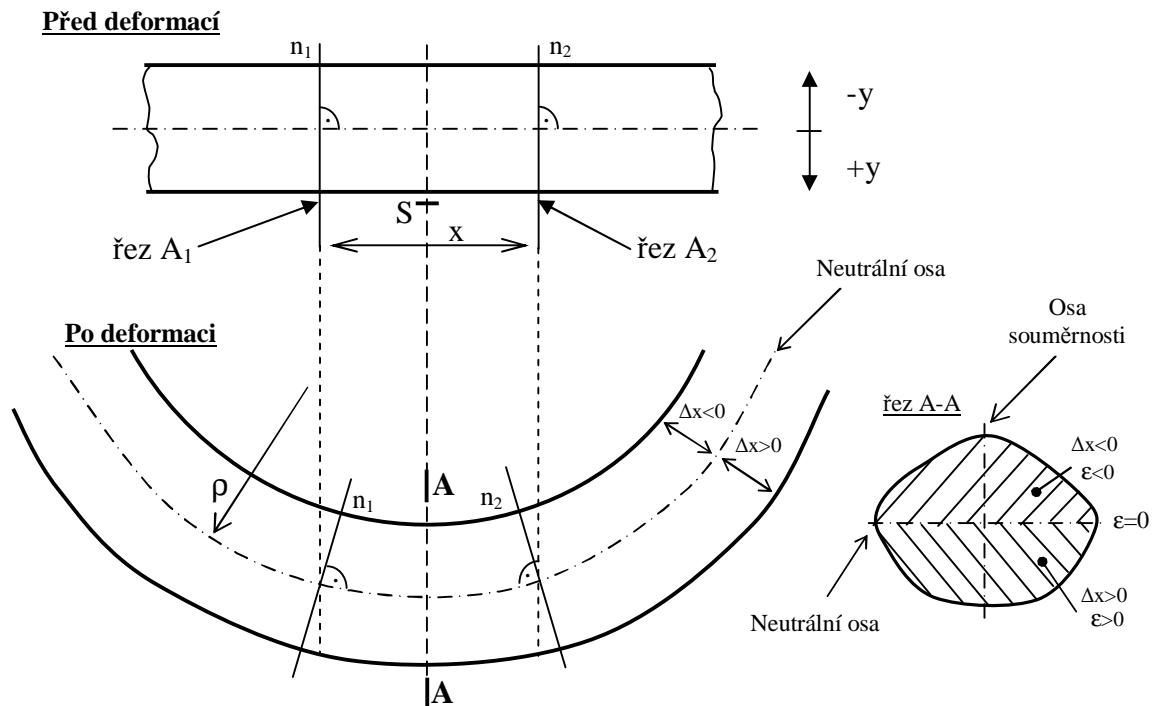


Obr.2.1

Připomeňme, že průběh ohybového momentu i posouvající síly jsou vyvolány vnějším zatížením nosníku. Prostřednictvím rovnic rovnováhy vyňatého elementu nosníku (viz obr.2.1) lze formulovat diferenciální vztahy mezi ohybovým momentem M_0 , posouvající silou T a vnějším zatížením $q(x)$. Tyto vztahy se označují jako Schwedlerovy věty. Platí:

$$\frac{dM_0(x)}{dx} = T(x) \quad \text{a} \quad \frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \quad . \quad (2.1 \text{ a } 2.2)$$

Při prostém ohybu je $M_0 = \text{konstant}$. Z rovnice 2.1 je patrné, že při prostém ohybu je posouvající síla $T(x)$ identicky rovna nule. Pro prostý ohyb je v technické pružnosti prokázána tzv. Bernoulliho hypotéza. Podle této hypotézy rovinné řezy, které byly před deformací kolmé k podélné ose nosníku, zůstanou rovinnými i po deformaci a budou kolmé k deformované podélné ose nosníku (viz obr. 2.2).



Obr. 2.2

Vedeme-li nosníkem myšlená podélná vlákna, pak je z obr. 2.2 patrné, že část těchto vláken je při ohybu prodloužena, část je zkrácena a část těchto vláken nezmění svoji délku. Vlákna, která nezmění svoji délku, vyplní tzv. neutrální plochu. Neutrální plocha protíná každý příčný průřez v neutrální ose. Za předpokladu, že nosník nepřenáší žádnou osovou sílu N , lze ukázat, že neutrální osa při ohybu musí procházet těžištěm průřezu.

Označme ρ poloměr zakřivení neutrální plochy. Úhel natočení řezů A_1 a A_2 po deformaci označme j . Pak délka nedeformovaného vlákna má délku:

$$L_0 = r \cdot j$$

Délka deformovaného vlákna je:

$$L = (r + y)j$$

Poměrná deformace vlákna ve vzdálenosti y od neutrální plochy je:

$$e(y) = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{(r + y) \cdot j - rj}{rj} = \frac{y}{r} \quad (2.3)$$

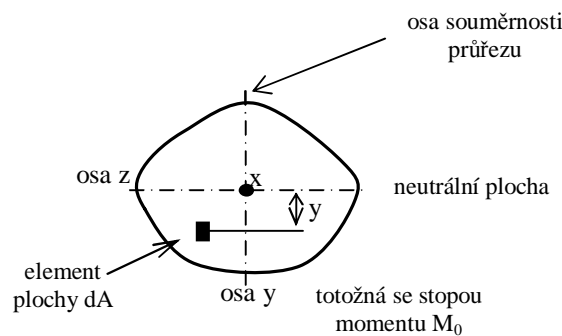
Prostý ohyb je jednoosá napjatost, pro níž platí Hookeův zákon.

$$s = E \cdot e$$

tj.

$$s(y) = E \cdot \frac{y}{r} \quad (2.4)$$

Vztah (2.3) pro deformaci a vztah (2.4) pro napětí ukazují, že největších hodnot je dosaženo v krajních vláknech, tj. ve vláknech nejvzdálenějších od neutrální osy. Prostřednictvím rovnice momentové rovnováhy k neutrální ose nalezneme vztah mezi křivostí ρ neutrální roviny a ohybovým momentem v daném příčném řezu nosníku (viz. obr.2.3).



Obr. 2.3

Momentová podmínka

$$\int_A y \cdot s(y) \cdot dA - M_0 = 0, \quad (2.5)$$

Dosazením rov. (2.4) za $s(y)$ do rov. (2.5) a po úpravě obdržíme:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_0}{E \cdot J_z}, \quad (2.6)$$

kde

$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA \quad (2.7)$$

je kvadratický moment průřezu k neutrální ose, totožné s osou z.

Dosazením vztahu (2.6) do vztahu (2.3) pro deformaci vlákna nosníku nalezneme vztah mezi ohybovým momentem M_0 vnějších sil a deformací vlákna nacházejícího se ve vzdálenosti y od neutrální osy. Platí tedy:

$$e(y) = \frac{M_0}{E \cdot J_z} \cdot y \quad (2.8)$$

Z předchozího vztahu je patrné, že deformace vlákna je dána:

- Ø Vnější zatížením (ohybový moment M_0)
- Ø Tuhostí materiálu (Youngův modul pružnosti E)
- Ø Geometrickým tvarem příčného průřezu (kvadratický moment průřezu J_z)

Poznamenejme, že součin ($E J_z$) se označuje jako ohybová tuhost nosníku.

Vztah mezi napětím ve vláknech a vnějším zatížením obdržíme dosazením vztahu (2.6) do vztahu (2.4), tj.

$$s(y) = \frac{M_0}{J_z} \cdot y \quad (2.9)$$

Jak již bylo řečeno, maximálního napětí je dosaženo v krajních vláknech, tj. pro $y=y_{\max}$, tedy:

$$s_{\max} = \frac{M_0}{J_z} \cdot y_{\max} \quad (2.10)$$

resp.

$$s_{\max} = \frac{M_0}{W_0} \quad (2.11)$$

kde

$$W_0 = \frac{J_z}{y_{\max}}$$

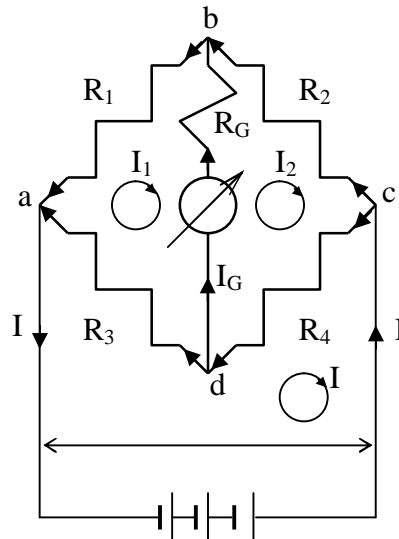
Veličina W_0 je charakteristika pouze tvaru příčného průřezu a je označována jako modul odporu průřezu v ohybu.

Pro obvyklé tvary příčného průřezu lze vztahy pro J_z a W_0 nalézt v technických tabulkách.

2.4 – Měření malých odporových změn tenzometrického snímače deformace

2.4.1 Můstkové zapojení

Nejběžnějším způsobem měření malých odporových změn tenzometrických snímačů je můstkové zapojení zpravidla označované jako Wheatstoneův můstek (Sir Charles Wheatstone 1802-1875). Schéma zapojení je uvedeno na obr. 2.4.



Obr. 2.4

Změna odporu některého z odporů R_1 až R_4 se projeví změnou proudu I_G protékajícího měřicí diagonálou (galvanometrem). Prostřednictvím Kirchhoffových zákonů lze stanovit velikost proudu I_G .

Připomeňme zmíněné Kirchhoffovy zákony:

- I. Algebraický součet proudů v kterémkoliv bodě (uzlu) je roven nule, tj.

$$\sum_1^h I_K = 0 .$$

- II. Součet všech svorkových napětí v uzavřeném obvodu je roven nule

$$\sum_1^h U_K = 0 .$$

Pro úplnost připomeňme též Ohmův zákon: $U = R \cdot I$.

Pro můstek uvedený na obr. 3.4 tedy platí:

$$I_G = \frac{U_G}{D} \cdot (R_1 \cdot R_4 - R_2 \cdot R_3) , \quad (2.12)$$

kde determinant D ve jmenovateli rov. (3.12) je dán

$$\begin{vmatrix} -R_2 & -(R_3 + R_4) & R_3 + R_4 \\ -R_G & R_1 + R_3 & -R_3 \\ R_2 + R_4 + R_G & R_2 + R_4 & -R_4 \end{vmatrix}$$

Při vyváženém můstku neprochází galvanometrem žádný proud tj. $I_G=0$.

Z rovnice (3.12) vyplývá vztah:

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3 \quad . \quad 2.13$$

Jestliže se při vyváženém můstku změni velikost odporů, např. odpor R_1 se změni o ΔR_1 , můstek se rozváží. Velikost ΔR_1 lze určit dvojím způsobem.

a. Nulová metoda

Při této metodě se můstek vyvažuje přidáním odporů do ostatních větví tak, aby opět platilo $I_G=0$. Vyvážení provedeme vhodnou změnou odporu R_2 .

$$\text{Pak} \quad (R_1 + \Delta R_1) \cdot R_4 = (R_2 + \Delta R_2) \cdot R_3 \quad . \quad (2.14)$$

Odtud měřená změna ΔR_1 je dána vztahem

$$\Delta R_1 = \Delta R_2 \frac{R_3}{R_4} = konst. \Delta R_2 \quad . \quad (2.15)$$

Nulovou metodu lze aplikovat u statických měření, kdy je na vyvážení dostatek času. Výhodou této metody je nezávislost přesnosti metody na kolísání napětí U_G .

b. Výhylková metoda

Při aplikaci této metody se můstek nevyvažuje, ale měří se přímo velikost proudu I_G . Je-li můstek vyvážen a změni-li se odpor R_1 o ΔR_1 , pak změna proudu v měřící větvi je

$$\Delta I_G = \frac{U_G}{D} \cdot R_4 \cdot \Delta R_1 \quad . \quad (2.16)$$

Vzhledem k tomu, že změna ΔR_1 oproti R_1 je velmi malá, lze zanedbat vliv ΔR_1 na hodnotu determinantu D. Pak $D'=D$ a tedy

$$\Delta I_G = \frac{U_G}{D} \cdot R_1 \cdot \Delta R_1 = konst. \Delta R_1 \quad . \quad (2.17)$$

2.4.2 Můstek napájený střídavým proudem

U můstku, který je napájen střídavým proudem, je nutné uvažovat místo ohmického odporu R odpor impedanční. tj.

$$Z = R + jX ,$$

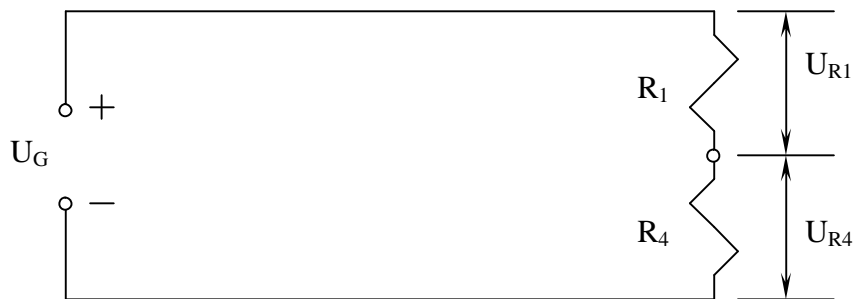
kde X je reaktance

Podmínky rovnováhy jsou $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ a $\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_3}{X_4}$.

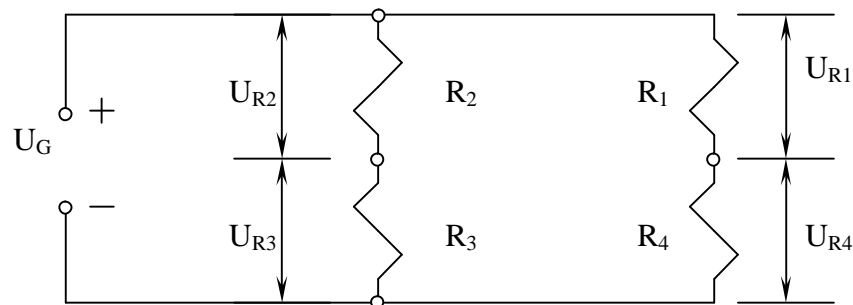
Pro vyvážení můstku je třeba nejen vyvážení ohmických odporů, ale také reaktancí, zpravidla kapacit. Jestliže u ohmicky i kapacitně vyváženého můstku nastane na snímači odporová změna ΔR_1 , je změna proudu I_G této změně úměrná.

2.4.3 Můstek jako dělič napětí

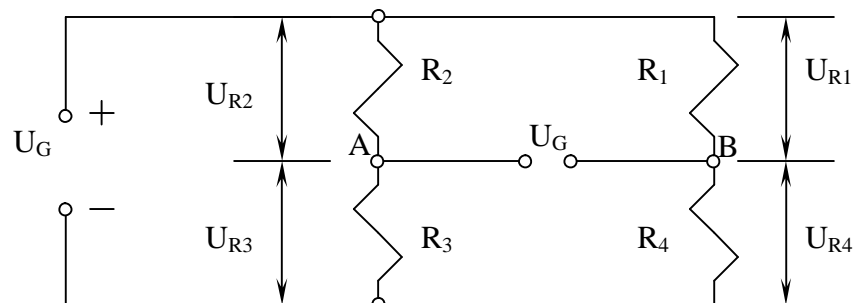
Nechť dva odpory R_1 a R_4 jsou zapojeny do série a připojeny ke zdroji konstantního napětí U_G . (viz. Obr. 2.5a)



Obr. 2.5a



Obr. 2.5b



Obr. 2.5c

Platí vztahy

$$\frac{U_{R1}}{U_{R2}} = \frac{R_1}{R_4} \quad (2.18)$$

$$U_{R1} = U_B - U_{R4} \quad (2.19)$$

Z předchozích vztahů pak

$$U_{R1} = U_B \frac{R_1}{R_1 + R_4} \quad (2.20)$$

$$U_{R4} = U_B \frac{R_4}{R_1 + R_4} \quad (2.21)$$

Napěťový můstek

Napěťový můstek lze považovat za paralelní zapojení dvou děličů napětí (viz obr.2.5b). Je zřejmé, že pro napěťový spád mezi body A a B platí:

$$U_G = U_{R1} - U_{R2} \quad (2.22a)$$

$$U_G = U_{R3} - U_{R4} \quad (2.22b)$$

Pro paralelní dělič a odpory R_2 a R_3 lze psáti:

$$U_B = U_{R2} + U_{R3} \quad (2.23)$$

$$U_{R2} = U_B \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} \quad (2.24)$$

kde

$$U_{R3} = U_B \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (2.25)$$

Dosazením vztahu (2.20) a (2.24) do rovnice (2.22a) obdržíme vyjádření výstupního napětí U_G ve tvaru

$$U_G = U_B \cdot \left(\frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right) \quad (2.26)$$

Z rovnice 2.26 je patrné, že můstek je v rovnováze, tj. $U_G=0$ za podmínky

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3} \quad (2.27)$$

Jestliže nastane na snímači R_1 odporová změna o ΔR_1 , pak lze derivací rovnice (2.26) ukázat, že změna výstupního napětí U_G je dána vztahem:

$$\Delta U_G = U_B \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_4}{(R_1 + R_4)^2} \quad (2.28)$$

Při měření s můstkovým zapojením se zpravidla volí $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$. V tomto případě, při změně odporu o ΔR jednoho z odporů můstku, bude výstupní napětí na diagonále můstku následující

$$\Delta U_G = \frac{\Delta R}{4R} \cdot U_B \quad (2.29)$$

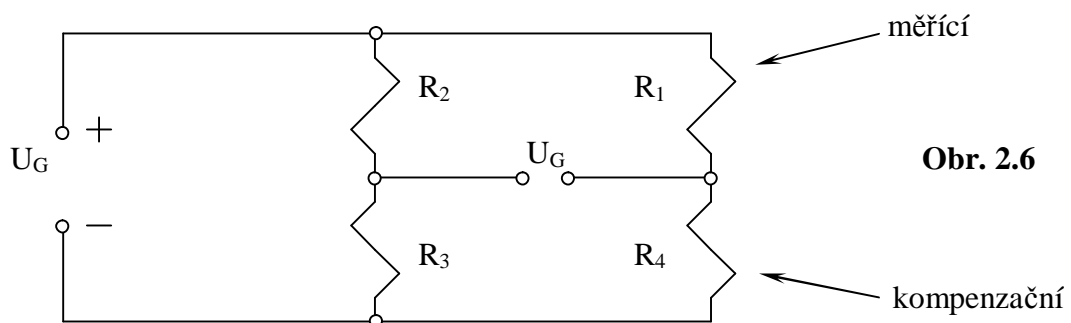
Jestliže nastane odporová změna současně ve 2 větvích, je výstupní signál z můstku dán rozdílem změn napětí v případě, že odporová změna nastala v sousedních větvích. V případě, že odporová změna nastala v protilehlých větvích, pak výstupní signál je dán součtem změn napětí.

Jestliže v sousedních větvích se změní odpory v obráceném smyslu, je výsledný signál dán jejich součtem tj. při stejně velké odporové změně v sousedních odporech zůstane můstek vyvážen. Při odporové změně všech čtyř ramen je výsledný signál čtyřnásobný, jestliže je změna odporu stejně veliká a ve vzájemně sousedících větvích obráceného znaménka. Platnost výše uvedených tvrzení lze ověřit prostřednictvím vztahu

$$\Delta U_G = U_B \cdot \left[\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_4 + \Delta R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2 + \Delta R_2}{R_2 + \Delta R_2 + R_3 + \Delta R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right] \quad (2.30)$$

Kompenzace teploty

Tato kompenzace se provádí prostřednictvím kompenzačního tenzometru umístěného na stejném materiálu jako tenzometr měřící, ale který není podroben napěťové deformaci (viz obr. 2.6). Jestliže při měření nastává změna teploty, vzniká jejím působením stejná odporová změna na snímači měrném i deformačním. Jsou-li tyto tenzometry zapojeny v můstku v jedné paralelní větvi, je odporová změna samotným můstkem eliminována.



Výše uvedené tvrzení lze opět prokázat prostřednictvím vztahu (2.30).