



1. lekce

Reologické modely technických materiálů při prostém tahu a tlaku

Obsah

1.1 – Základní pojmy	2
Vnitřní síly – napětí	2
1.2 – Základní reologické modely technických materiálů	3
1.3 – Elementární reologické modely creepu	5
Voigt – Kelvinův model	5
Standardní model	7
1.4 – Elementární modely plasticity	8
1.5 – Reologický model elasticko-viskoplastického materiálu	9

1.1 – Základní pojmy

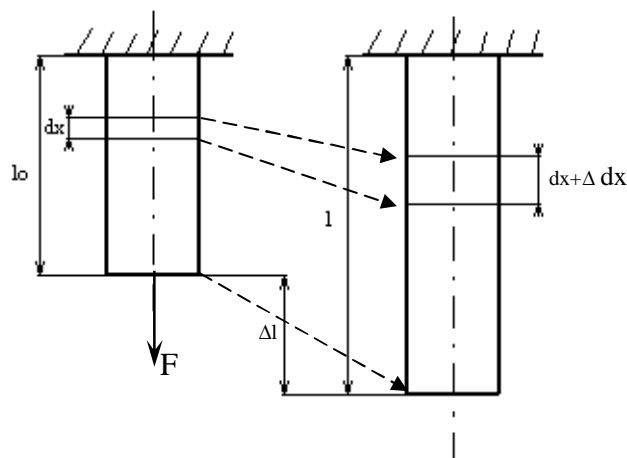
Vnitřní síly – napětí

Obecné těleso nacházející se ve stavu statické rovnováhy je zatíženo vnějšími silami. Účinkem těchto sil se každé těleso deformuje. Tato deformace vyvolá v tělesu tzv. **vnitřní síly**. Velikost vnitřních sil se určuje **metodou myšleného řezu**. Tělesa, jejichž podélný rozměr je mnohem větší než zbývající dva rozměry, se nazývají pruty. Spojnice těžišť jednotlivých průřezů je **osa prutu**. Je-li osa prutu přímka, pak **prut** se nazývá **přímý**. Přímý prut je těleso našeho zájmu v 1. lekci.

Normálové napětí σ je normálová vnitřní síla N vztažená na velikost příčného průřezu A_0 .

$$\sigma = \frac{N}{A_0} . \quad (1.1)$$

Element prutu o původní délce dx vlivem vnitřních sil změní po zatížení svou délku na hodnotu $dx + \Delta dx$. Změna délky elementu dx je tedy Δdx . (viz obr. 1.1)



Obr. 1.1

Relativní deformace (přetvoření) je určena poměrem změny délky k délce původní, tj.

$$e(x) = \frac{\Delta dx}{dx} . \quad (1.2)$$

Je-li po celé délce prutu **$e(x) = konst$** , lze poměrnou deformací vyjádřit z konečných rozměrů celého prutu, tj.

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} . \quad (1.3)$$

Normálová deformace je spjata s normálovým napětím. Normálová deformace, která je spjata se **zvětšením délky**, je označena jako **kladná (+)**. Odpovídající normálové napětí je **tahové** a má znaménko (+). Obdobně je zavedeno znaménko (-) pro tlakovou deformaci a **tlakové normálové napětí**.

Axiální normálová deformace prutu je vždy spjata s příčnou deformací opačného znaménka ve dvou směrech kolmých k axiální deformaci.

Absolutní hodnota **poměru příčné deformace k podélné deformaci** je označena jako **Poissonovo číslo**. Toto číslo je označováno malým řeckým písmenem μ nebo ν .

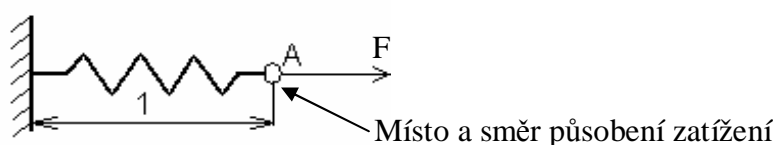
1.2 – Základní reologické modely technických materiálů

Reologie je součástí mechaniky kontinua. V tomto vědním oboru se zkoumají **obecné zákony vzniku a rozvoje deformace daného materiálu** vlivem rozličných příčin a v rozličných termodynamických podmínkách. V technickém slova smyslu se hledá **vztah mezi vnitřními silami (napětím) a deformací materiálu deformovaného tělesa**.

V případě materiálu prutu zatíženého jednoosým tahem a tlakem jsou základními **reologickými modely** následující modely. Uvažujeme prut s příčným průřezem jednotkové plochy.

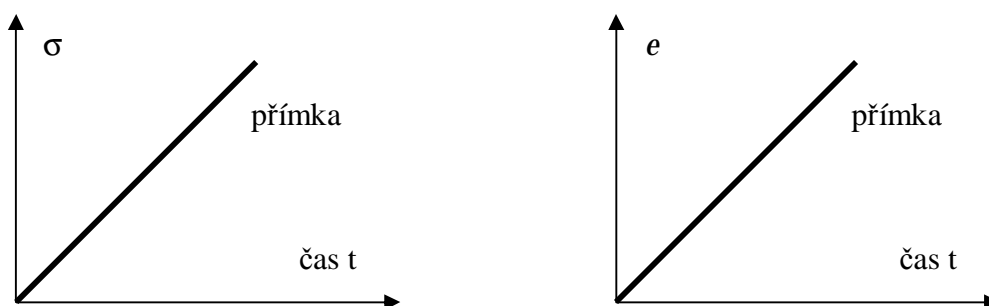
a) Lineárně elastický model materiálu

Model je tvořen lineární pružinou



Obr. 1.2

Pracovní diagram



Obr. 1.3

Vyloučením času obdržíme závislost

$$\sigma = f(e) = E e . \quad (1.4)$$

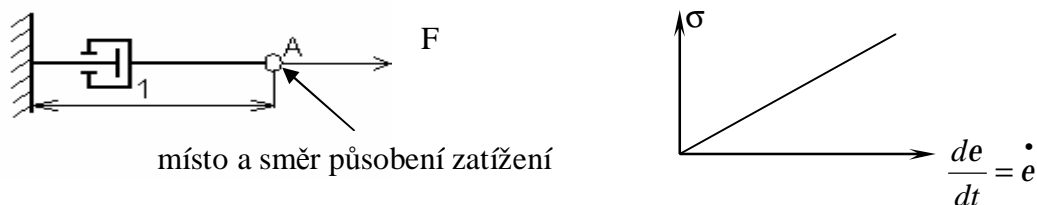
Tato závislost je označována jako **Hookeův zákon**. Konstanta úměrnosti E je označována jako **Youngův modul pružnosti**.

Model lineárně elastického materiálu je nejčastěji používaný model technických materiálů jako je ocel, slitiny Al a Mg a některých krátkodobě zatížených plastů.

Lineárně elastický model materiálů je vhodný i pro krátkodobé zatížení součástí při zvýšených teplotách. Je však nutné uvážit závislost Youngova modulu na teplotě.

b) Ideálně viskózní model materiálu

Model je tvořen tlumičem (kataraktem) s newtonovskou kapalinou.



Obr. 1.4

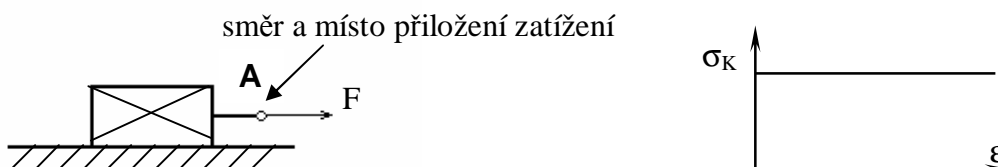
Odpor pístu v kataraktu lineárně narůstá s růstem rychlosti posuvu pístu, tj.

$$s = h \frac{de}{dt} = h \cdot \dot{e} , \quad (1.5)$$

kde h je koeficient viskozity.

c) Ideálně plastický model materiálu

Model umožňuje posuvný pohyb tělesa vlečeného po rovinné ploše za předpokladu platnosti Coulombova tření.

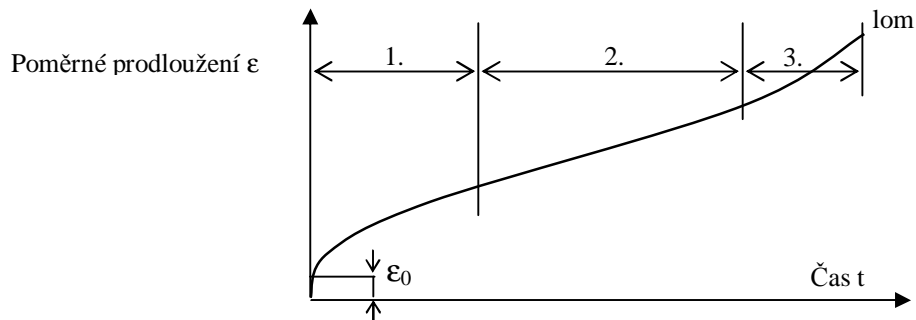


Obr. 1.5

Vnitřní síla (napětí) potřebná pro překonání odporu proti pohybu se nazývá mez kluzu a často se v literatuře označuje σ_k resp. σ_Y .

1.3 – Elementární reologické modely creepu

Creep je trvalá (nevratná) deformace uskutečňující se při konstantní teplotě a konstantním napětím (resp. zatížení) v závislosti na čase. Graficky zobrazená závislost deformace na čase se nazývá creepovou křivkou (viz obr. 1.6).



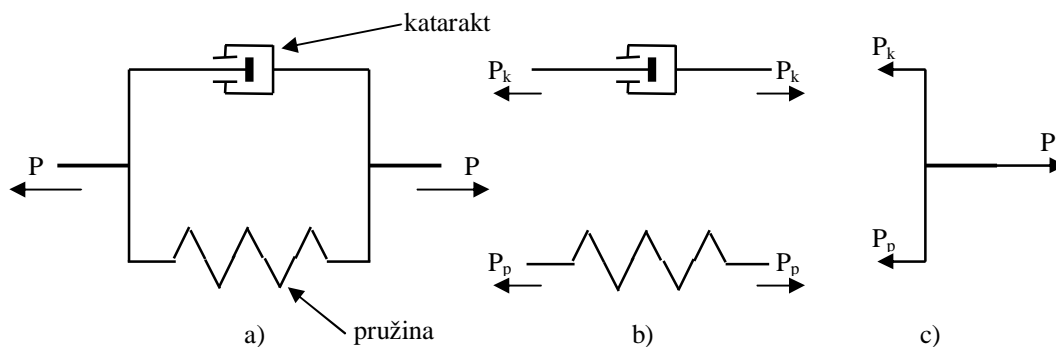
Obr. 1.6

Tato křivka charakterizuje (v závislosti na teplotě a napětí) jedno, dvě, případně tři stadia creepu. První stadium, v němž po okamžitém počátečním prodloužení rychlost creepu klesá, se nazývá stadium primárního resp. tranzitního creepu. Ve druhém stadiu, se rychlost creepu časem nemění. Stadium se nazývá stadium sekundárního creepu s rychlostí ϵ_s . Ve třetím stadiu – stadiu terciárního creepu – rychlost creepu dramaticky v čase roste. Terciární stadium creepu končí lomem.

Ukažme si dále, jak prostřednictvím elementárních reologických modelů lze modelovat creepovou křivku v primárním a sekundárním stadiu pro jednoose namáhaný prut.

Voigt – Kelvinův model

Tento model obdržíme paralelním spojením kataraktu a pružiny (viz obr. 1.7).



Obr. 1.7

Označme prodloužení pružiny δ_p . Toto prodloužení je úměrné síle P_p působící v pružině, tj.

$$d_p = k_1 \cdot P_p.$$

Obdobně pro katarakt platí :

$$\frac{dd_k}{dt} = k_2 \cdot P_k .$$

Z obr. 1.7 je patrné, že pro posuvy δ_p a δ_k lze psát:

$$\delta = \delta_k = \delta_p .$$

Z uvedeného obrázku je též patrná platnost rovnice rovnováhy:

$$P = P_p + P_k .$$

Dosadíme-li za síly P_p a P_k předchozí vztahy, obdržíme:

$$P = \frac{d}{k_1} + \frac{1}{k_2} \cdot \frac{dd}{dt} . \quad (1.6)$$

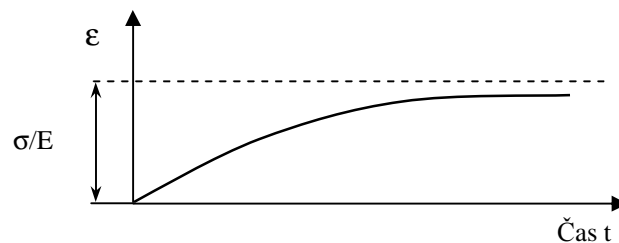
Nahradíme-li síly P napětím σ , posun δ deformací ϵ a koeficienty $k_1 = 1/E$ a $k_2 = 1/\eta$, pak lze psát:

$$s = E \cdot e + h \frac{de}{dt} . \quad (1.7)$$

Za předpokladu, že počáteční deformace je nulová, lze rovnicí (1.7) při konstantním napětí σ integrovat. Obdržíme tak následující exponenciální vztah pro deformaci e .

$$e = \frac{s}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{h} \cdot t\right) \right] . \quad (1.8)$$

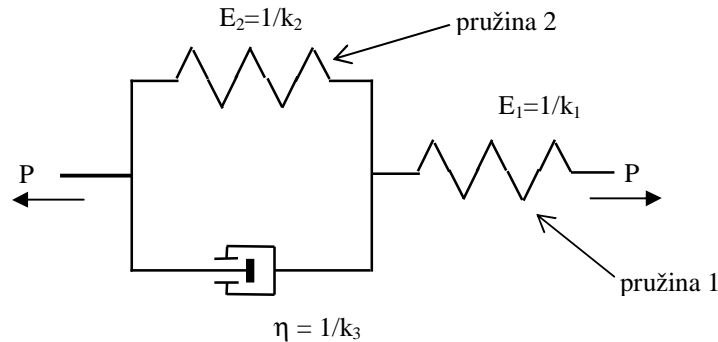
Z rovnice (1.8) je patrné, že pro $t \rightarrow \infty$ deformace e konverguje k hodnotě σ/E . Časový průběh deformace pro Voigh-Kelvinův model viskoelastického tělesa je schematicky uveden na obr. 1.8.



Obr. 1.8

Standardní model

Tento model se skládá ze dvou „pružin“ a jednoho kataraktu (tlumiče). Zapojení těchto prvků je patrné z obr. 1.9.



Obr. 1.9

Platí:

$$\frac{ds}{dt} + a \cdot s = E_1 \left(\frac{de}{dt} + b \cdot e \right), \quad (1.9)$$

kde

$$a = \frac{E_1 + E_2}{h} \quad \text{a} \quad b = \frac{E_2}{h}.$$

Při náhlém přiložení zatížení rovnice (1.9) se redukuje na vztah: $\frac{ds}{dt} = E_1 \cdot \frac{de}{dt}$.

Po integraci platí: $s = E_1 \cdot e$.

Pro $t = 0$ se jedná o elastickou deformaci pružiny 1. Modul E_1 je označován jako okamžitý modul pružnosti.

V případě velmi pomalého přiložení zatížení jsou derivace napětí a deformace dle času velmi malé ve srovnání s ostatními členy v rovnici (1.9). Zanedbáme-li v rovnici (1.9) členy s časovými derivacemi, obdržíme:

$$s = \frac{E_1 \cdot b}{a} \cdot e = \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \cdot e.$$

Veličina $\frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}$ je často označovaná jako dlouhodobý modul pružnosti.

Je patrné, že tento dlouhodobý modul je dán lineárním spojením pružiny 1 s pružinou 2 (viz obr.1.9)

Integrací rovnice (1.9) pro $\sigma = \text{konst.}$ obdržíme:

$$e = \frac{s}{E_1} \left\{ 1 + \frac{a-b}{b} [1 - \exp(-b \cdot t)] \right\} . \quad (1.10)$$

Rovnice (1.7) a (1.9) jsou označovány jako konstitutivní rovnice daného modelu viskoelastického tělesa. Je možné sestavit modely sestávající z mnoha elementárních „pružin“ a „kataraktů“. Konstituční rovnici takového viskoelastického tělesa lze pak zobecnit do následujícího vzorce:

$$a_0 \cdot s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \cdot \frac{d^n s}{dt^n} = b_0 \cdot e + b_1 \frac{de}{dt} + \dots + b_n \frac{d^n e}{dt^n} . \quad (1.11)$$

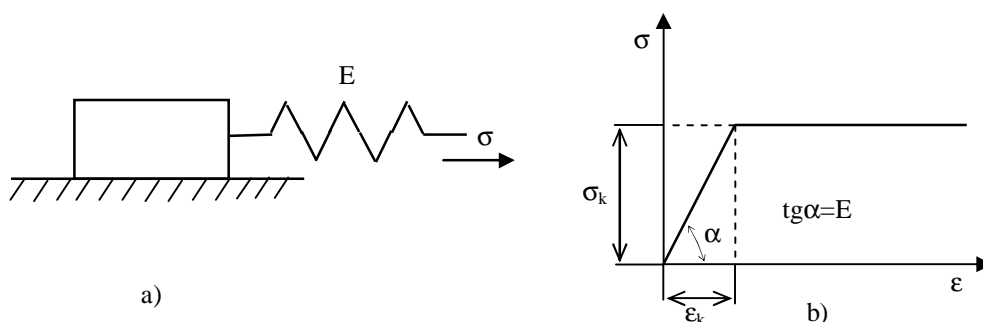
1.4 – Elementární modely plasticity

Plasticita je schopnost těles nabývat při působení zatížení časově nezávislých trvalých, nevratných deformací.

Reologický model ideálního tuhoplastického materiálu byl uveden v kapitole 1.2.

Připomínáme, že tento model je tvořen tělesem vlečeným po vodorovné drsné podložce. V tuhoplastickém tělese vzniká trvalá nevratná plastická deformace po překročení meze kluzu σ_k .

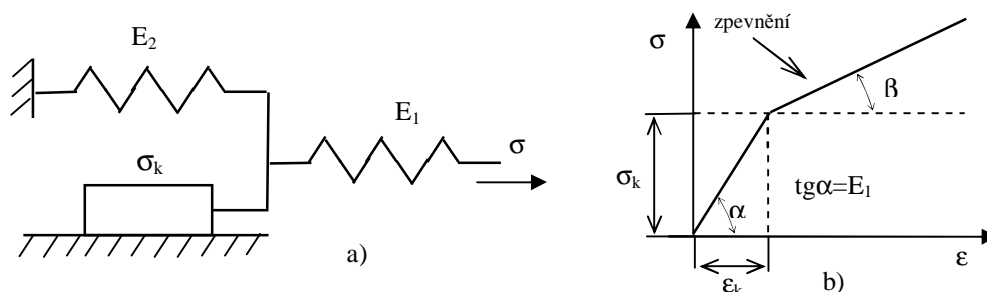
Přidáním lineární pružiny do série (viz obr. 1.10a) k vlečenému tělesu se vytvoří reologický model ideálního elastoplastického materiálu s mezí kluzu σ_k a modulem pružnosti E . Závislost napětí σ na deformaci ϵ , tj. deformační charakteristika, je uvedena na (obrázku 1.10b).



Obr. 1.10

Reologický model elastoplastického tělesa se zpevněním je uveden na obr.(1.11a).

Deformační charakteristika tohoto modelu je uvedena na obr.(1.11b)



Obr. 1.11

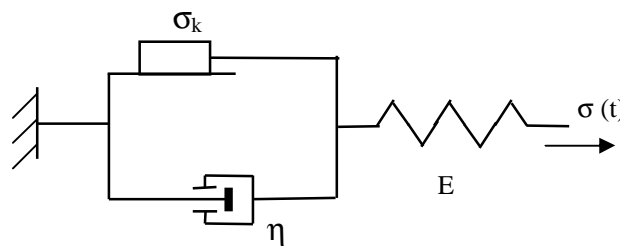
V obrázku 1.11 značí:

$$tga = E_1 \quad pro \ s \leq s_k ,$$

$$tgb = \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \quad pro \ s \geq s_k .$$

1.5 – Reologický model elasto-visko-plastického materiálu

Při šíření deformačních vln nebo při vysokoteplotní nízkocyklové únavě mohou být viskózní a plastické deformace vzájemně vázány (materiál viskoplastický). Za předpokladu, že vzniká též elastická (pružná) odezva na zatížení, lze vytvořit prostřednictvím základních reologických modelů (viz kap. 1.2) elasticko-viskoplastický model, který je uveden na obr. 1.12.



Obr. 1.12

Konstitutivní rovnice tohoto modelu musí rozlišit případy, kdy plastické deformace vznikají a kdy nikoliv.

Platí:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{1}{h} (s \pm s_k) \quad pro \ |s| \geq s_k , \quad (1.12a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{ds}{dt} \quad pro \ |s| < s_k . \quad (1.12b)$$

V rovnici 1.12a horní znaménko platí pro tah ($\sigma > 0$) a dolní znaménko pro tlak ($\sigma < 0$).