



10. lekce

Řešení rovinných prutových soustav pomocí metody konečných prvků

Doc. Ing. Antonín Potěšil, CSc.

Obsah:

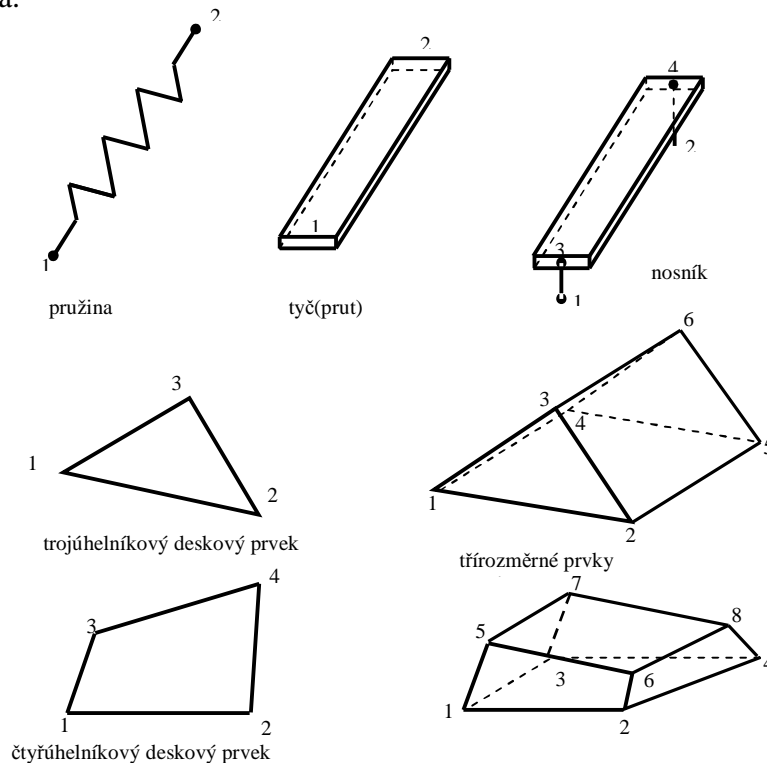
<i>10.1 - Úvod</i>	2
<i>10.2 - Použití MKP</i>	3
<i>10.3 - Typy okrajových úloh</i>	3
<i>10.4 - Formulace MKP</i>	3
<i>10.5 - Deformační varianta MKP</i>	4
<i>Doporučená literatura ke studiu MKP</i>	10
<i>Příklad řešení prutové soustavy</i>	11

10.1 - Úvod

Cílem lekce je uvést posluchače do problematiky koncepce metody konečných prvků (zkr. MKP, angl. Finite Element Method – FEM). Ke hlubšímu studiu problematiky je však nutné obrátit pozornost na práce uvedené na konci této lekce.

MKP je numerická metoda, ve které řídicí rovnice problému jsou reprezentovány v maticové formě, což je vhodné pro řešení na počítačích. Zkoumaná oblast tělesa je přitom idealizovaná pomocí vhodně uspořádaných malých podoblastí, nazývaných **konečné prvky (elementy)**. Když je tato metoda aplikovaná na hmotné kontinuum (pevné či kapalné prostředí, spíše než prostředí složené z diskretních molekul), **idealizace spočívá ve vytvoření (vygenerování) sítě složené z konečného počtu prvků (elementů)**, které mají omezený, resp. konečný počet stupňů volnosti (pohyblivosti). **Prvek** je tak základní „stavební jednotkou“ s definovaným počtem stupňů pohyblivosti a může mít různé tvary a formy. Např. pružina, tyč - prut, nosník, membrána, deska dané tloušťky, prostorový 3D prvek aj., viz např. obr. 1.

Prvky jsou spojeny v diskretních bodech (obvykle rozích, někdy ve středních bodech), které jsou nazývány **uzly (nódy)**. Každý prvek má svoji vlastní charakteristickou **fyzikální závislost**, která je např. v **mechanice pevného kontinua** daná vztahem mezi **zatížením (silou) a deformací**, tzv. **tuhost prvku** a která je reprezentovaná tzv. **maticí tuhosti prvků**. Ta je funkcí geometrie prvku a matematického popisu (modelu) fyzikálního chování materiálu prvku (elastický, plastický, viskoelastický, apod. model materiálu). Analýza spočívá v sestavení a následném řešení soustavy rovnic platných pro idealizovanou oblast tělesa, tj. pro síť prvků spojených v uzlech, přičemž výsledkem řešení jsou posuvy každého uzlu sítě pro dané zatěžovací a okrajové podmínky. Jakmile je pole posuvů uzlů sítě stanoveno, mohou být pomocí vztahů posunutí – deformace a deformace – napětí určeny deformace a napětí v jakémkoliv místě zkoumané idealizované oblasti (sítě) tělesa.



Obr. 10.1

10.2 - Použití MKP

Vznik a vypracování algoritmů MKP je spjatý s rozvojem leteckého a raketového průmyslu a s potřebami provádět analýzy deformací a napjatosti rozměrných soustav a zařízení (potrubní systémy, karosérie automobilů, pláště jaderných reaktorů apod.). Obecná povaha MKP umožňuje řešit celou řadu okrajových úloh (tj. úloh, ve kterých je požadováno vyhovující řešení pro předepsané zatěžující a okrajové podmínky). Vedle standardní elastické analýzy napětí byla tato metoda aplikována v plasticitě, creepu, únavě, lomové mechanice a dynamické analýze soustav. Dále tato metoda nemá omezení ve stavební mechanice, byla aplikována úspěšně i v jiných fyzikálně známých disciplínách jako jsou teplotní jevy, dynamické jevy v kapalných a plynných mediích, elektrická a magnetická pole, smíšené úlohy interakce polí nebo i piezoelektrické jevy, radiace, chemické jevy, různé formy transportu hmoty aj. Protože tato problematika svoji obecnou a široce obsáhlou povahou zachází za rámec této lekce, který je pouze úvodem do užití MKP v oblasti pevnostních analýz elastických těles, nebudeme se detaily MKP podrobněji zabývat. Omezíme pozornost na základní fáze filozofie MKP, které jsou nutné pro získání prvotních znalostí o existenci této problematiky v návaznosti na předchozí lekce.

10.3 – Typy okrajových úloh

Okrajové úlohy mechaniky pevného kontinua mohou být rozděleny do tří hlavních skupin:

1. Problémy rovnovážných, resp. ustálených (stabilních) stavů, např. řešení posunutí nebo deformace (přetvoření), tepelná pole nebo teplotní toky, tlaková a rychlostní pole.
2. Problémy vlastních hodnot, které jsou spojeny s pojmy jako např. modální analýza, vlastní frekvence a vlastní tvary kmitů, rezonance, stabilitní problémy apod.
3. Problémy dynamických a přechodových jevů, např. vibrace, přechodové stavy napětí a přetvoření, např. vznik a šíření trhlin, šíření vln, přechodové tepelné jevy aj.

Jak bylo výše poznamenáno, dále bude pozornost této lekce věnována problémům pouze rovnovážných stavů.

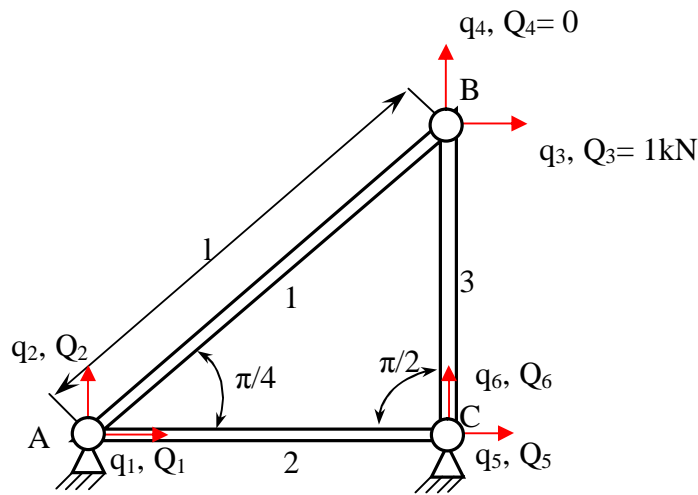
10.4 - Formulace MKP

I když předmětem naší analýzy budou pouze problémy strojnické a stavební mechaniky, formulace MKP může být zavedena různými způsoby, které se klasifikují dle toho, zda je užito diferenciálních rovnic nebo variačních principů. Z formulací užívajících diferenciálních rovnic je nejdůležitější deformační varianta MKP. Většina programů pro analýzu problémů mechaniky kontinua byla vyvinuta pomocí tohoto přístupu především pro svoji jednoduchost, obecnost a dobré numerické vlastnosti. Pouze deformační varianta MKP bude uvažovaná dále, i když je možné dokumentovat užití i jiných přístupů.

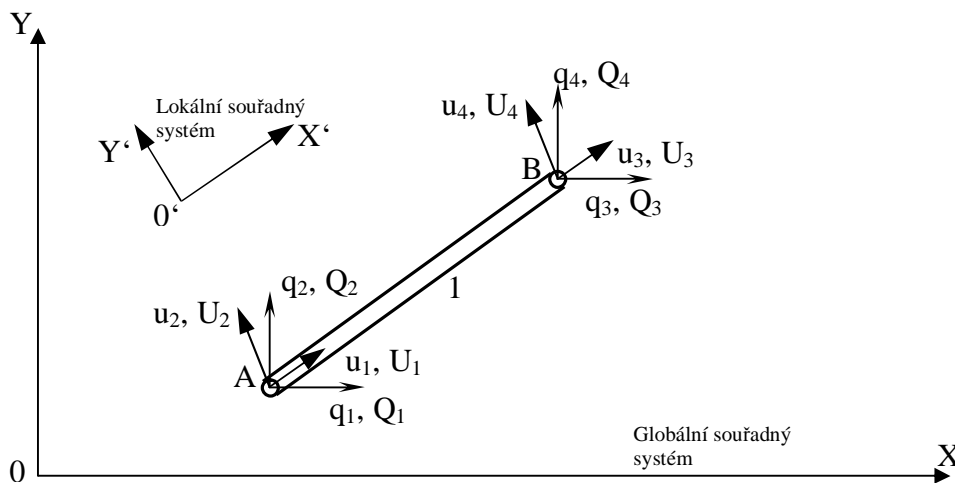
10.5 – Deformační varianta MKP

Deformační varianta MKP může být považována za rozšíření metody deformační analýzy soustav, která byla po mnoho let užívána k analýze prutových soustav. Navíc je výhodná z metodického hlediska pro objasnění základních principů MKP.

Předpokládejme, že naším úkolem je analyzovat „diskrétní systém“ tvořený pruty (prvky) v rovině, které jsou spojeny, resp. uloženy v kloubech (uzlech), viz obr. 2. Předmětem analýzy je stanovit posunutí jednotlivých kloubů (uzlů) prutové soustavy, síly, resp. napětí v prutech. Izolujme jeden prvek soustavy, např. (prut 1), viz obr. 3. Protože se zabýváme rovinným problémem, každý uzel má dva stupně pohyblivosti (volnosti), a to ve směrech globálních souřadných os X a Y . Každý prvek sítě pak bude mít čtyři stupně pohyblivosti. Zavedeme označení pro posunutí uzlů prvku q_1, q_2, q_3, q_4 a pro síly, které vyvolají tato posunutí, Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4 .



Obr. 10.2



Obr. 10.3

Pro vyjádření vztahu mezi vektorem sil $\{Q\}$ a vektorem posunutí $\{q\}$ v globálním souřadném systému X-Y je výhodné nejdříve pracovat s vektory sil $\{U\}=\{U_1, U_2, U_3, U_4\}^T$ a posuvů $\{u\}=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}^T$ v lokálním souřadném systému daného prvku, t.j. X'-Y', viz obr. 3. Jednoduchou aplikací Hookeova zákona a principu superpozice, viz poznámka na konci textu, lze vyjádřit vztah $\{U\} - \{u\}$ jako

$$U_1 = \frac{EA}{L}(u_1 - u_3), \quad U_3 = \frac{EA}{L}(u_3 - u_1), \quad (10.1)$$

kde E je Youngův modul pružnosti, A je plocha příčného průřezu a L délka prvku. Zlomek ve výrazech (1) má tedy význam délkové tuhosti prvku ve směru osy X', pro kterou zavedme označení $k = \frac{EA}{L}$. Dále, je-li tyčový prvek izolován, nemá žádnou tuhost ve směru osy Y', avšak tato tuhost vznikne, jakmile se prvek začlení do soustavy (sítě) prvků, k čemuž přispějí ostatní prvky z jeho okolí. Z těchto důvodů je možné pro izolovaný prvek, např. 1, zapsat vztah mezi vektory sil a posunutí vzhledem k lokálnímu souřadnému systému X'-Y' v maticovém tvaru

$$\{U\} = [k']_1 \{u\}, \quad (10.2)$$

kde matice $[k']_1$ je nazývána „lokální“ **maticí tuhosti prvku 1**. Platí

$$[k']_1 = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.3)$$

Aby bylo možné později slučovat posuvy, resp. síly různých prvků v uzlových bodech sítě, je nutné transformovat vztah (2) do globálního souřadného systému os X a Y, který je společný pro všechny prvky sítě. Taková transformace je známá a snadná k vyjádření. Mezi „lokálními“ posuvy vektoru $\{u\}=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}^T$ a „globálními“ posuvy vektoru $\{q\}=\{q_1, q_2, q_3, q_4\}^T$ platí vztahy:

$$\begin{aligned} u_1 &= q_1 \cos a + q_2 \sin a \\ u_2 &= -q_1 \sin a + q_2 \cos a \\ u_3 &= q_3 \cos a + q_4 \sin a \\ u_4 &= -q_3 \sin a + q_4 \cos a \end{aligned} \quad (10.4)$$

Zapíšeme-li předchozí vztahy v maticovém tvaru, dostaneme

$$\{u\} = [T] \{q\} \quad (10.5)$$

kde matice [T] je transformační matice, pro kterou platí

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & 0 & -\sin a & \cos a \end{bmatrix} \quad (10.6)$$



Poznamenejme, že užitečnou vlastností transformační matice je to, že její transpozice se rovná její inverzi, tj.

$$[T]^T = [T]^{-1}, \quad (10.7)$$

což bude dále využito.

Analogicky platí mezi „lokálními“ $\{U\}$ a „globálními“ $\{Q\}$ silami v uzlech prvku transformační relace

$$\{U\} = [T]\{Q\}. \quad (10.8)$$

Dosadíme-li výrazy (5) a (7) do (2), dostaneme

$$[T]\{Q\} = [k']_1 [T]\{q\}. \quad (10.9)$$

Násobíme-li obě strany předchozí rovnice $[T]^{-1}$ zleva, obdržíme

$$[T]^{-1} [T]\{Q\} = [T]^{-1} [k']_1 [T]\{q\}. \quad (10.10)$$

S využitím vlastnosti (7) a skutečnosti, že $[T]^{-1} [T] = [I]$, kde $[I]$ je jednotková matice, dostaneme

$$\{Q\} = [T]^T [k']_1 [T]\{q\}. \quad (10.11)$$

Součin tří matic $[T]^T [k']_1 [T] = [k]_1$ je nazýván **globální maticí tuhosti prvku 1**, přičemž výraz (11) lze přepsat do tvaru

$$\{Q\} = [k]_1 \{q\}. \quad (10.12)$$

Lze ukázat, že globální matice tuhosti prvku má tvar

$$[k]_1 = k \left[\begin{array}{cc|cc} \cos^2 a & \sin a \cos a & -\cos^2 a & -\sin a \cos a \\ \sin a \cos a & \sin^2 a & -\sin a \cos a & -\sin^2 a \\ \hline -\cos^2 a & -\sin a \cos a & \cos^2 a & \sin a \cos a \\ -\sin a \cos a & -\sin^2 a & \sin a \cos a & \sin^2 a \end{array} \right]. \quad (10.13)$$

Všimněme si, že globální matice tuhosti prvku je symetrická vzhledem k hlavní diagonále a je tvořena čtyřmi submaticemi, které jsou po dvojicích shodné.

Dosud jsme se zabývali stanovením tuhostní charakteristiky jednoho prvku soustavy. Je logické, že musí existovat tuhostní charakteristika celé soustavy (prvků), do které přinese svůj příspěvek, díky platnosti principu superpozice, každý jednotlivý prvek, tzn. že existuje **matice tuhosti celé soustavy prvků** - označme ji $[K]$. Proces vytvoření této matice pro prutovou soustavu na obr. 2 ilustruje tabulka 1, ve které rozmístění řádků a sloupců v maticích tuhostí jednotlivých prvků (druhý sloupec tabulky) je udáno čísly řádků a sloupců v matici tuhosti soustavy (třetí sloupec tabulky).

Tabulka 10.1

Přispívající prvek (i)	Řádek a sloupec matice $[k]_i$	Řádek a sloupec matice $[K]$
(1)	1 2 3 4	1 2 3 4
(2)	1 2 3 4	1 2 5 6
(3)	1 2 3 4	3 4 5 6

Pro ilustraci procesu sestavení matice $[K]$ ukažme její symbolickou strukturu (čísla v závorkách značí příspěvek pocházející z matice tuhosti $[k]_{(i)}$ příslušného prvku (i), případně součet příspěvků od více prvků, např. (1+3)):

	1	2	3	4	5	6
1	(1+2)	(1+2)	(1)	(1)	0	0
2	(1+2)	(1+2)	(1)	(1)	0	0
3	(1)	(1)	(1+3)	(1+3)	(3)	(3)
4	(1)	(1)	(1+3)	(1+3)	(3)	(3)
5	0	0	(3)	(3)	(2+3)	(2+3)
6	0	0	(3)	(3)	(2+3)	(2+3)

Je zřejmé, že tento proces sestavení matice tuhosti soustavy lze „svěřit“ počítači, pokud je nalezen vhodný algoritmus využívající k tomu geometrickou strukturu prutové soustavy, tzv. topologii soustavy. Řídící systém rovnic pro danou prutovou soustavu lze pak zapsat ve tvaru

$$\{Q\} = [K]\{q\}, \quad (14)$$

kde $\{Q\} = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6\}^T$ je vektor reprezentující složky vnějších zatížení (v uzlech) včetně reakcí a $\{q\} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}^T$ je vektor složek posunutí uzlů dané prutové soustavy.

Protože systém rovnic reprezentovaný v maticovém tvaru (14) popisuje pohyb prutové soustavy jako celku (lze totiž ukázat, že matice $[K]$ je symetrická a její determinant je roven nule), což

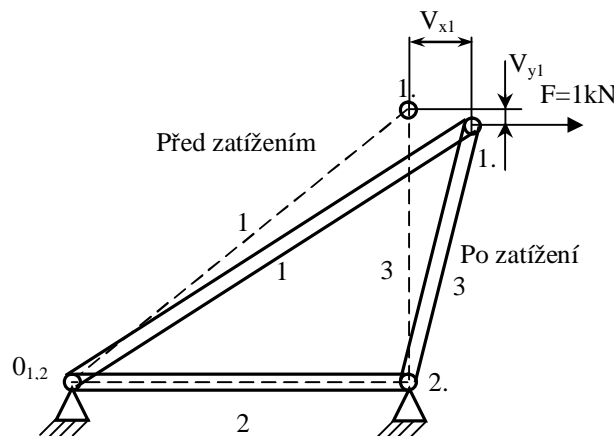
není fyzikální řešení pro naše potřeby postačující, je nutné soustavu „fixovat“, tj. zamezit jejímu volnému pohybu v rovině, jinými slovy řečeno, je nutné předepsat okrajové podmínky.

Pro uložení prutové soustavy na obr.2 tyto okrajové podmínky jsou $q_1=q_2=q_5=q_6=0$. Poznamenejme ještě, že síly Q_1 , Q_2 , Q_5 a Q_6 jsou reakce v uložení soustavy, a $Q_3=F$ a $Q_4=0$ jsou zatěžující síly.

Po uplatnění výše uvedených podmínek v (14) lze soustavu rovnic řešit vzhledem k neznámým složkám posuvů, určit síly v prutech soustavy, napětí, případně reakce. Je zřejmé, že všechny tyto vcelku pracné procedury může prostřednictvím vhodných algoritmů realizovat počítač, včetně zpracování výstupu výsledků v numerické a grafické formě.

Příkladem řešení rovinných prutových soustav programovými technologiemi na současných počítačích je program ANSYS, který je dostupný ve vybraných počítačových učebnách a laboratořích TUL.

Výsledky získané tímto programem pro jednoduchou prutovou soustavu na obr. 2 jsou uvedeny v následujících tabulkách spolu se vstupními daty. Grafický výstup z počítače, viz obr. 4, umožňuje získat informativní představu o deformaci soustavy, ve které jsou posuvy styčníků (uzlů) zvětšeny v měřítku. Nasazení programu ANSYS v různých fyzikálních aplikacích je předmětem studia v několika studijních programech TUL.



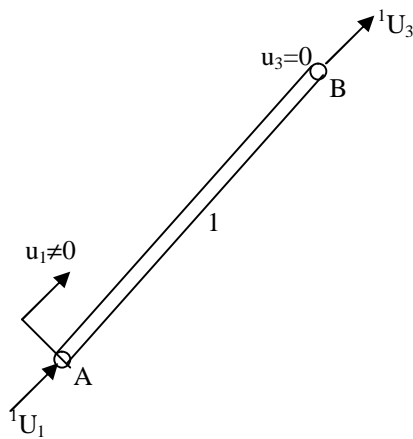
Obr. 10.4

Poznámka: Deformační chování prvku AB ve směru jeho osy X' rozložíme do dvou případů. Nejdříve předpokládejme, že konec B prvku je nepohyblivý, tj. $u_3=0$, viz obr.10.P1a. Potom sílu 1U_1 , která vyvolá posuv u_1 , vyjádříme pomocí Hookeova zákona jako

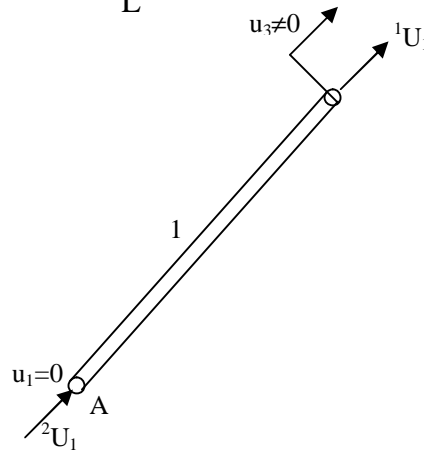
$${}^1U_1 = \frac{EA}{L} u_1.$$

Protože rovnice rovnováhy prvku musí být splněna, platí:

$${}^1U_1 + {}^1U_3 = 0, \text{ resp. } {}^1U_3 = -{}^1U_1 = -\frac{EA}{L} u_1.$$



Obr. 10.P1a



Obr. 10.P1b

Když analogické úvahy aplikujeme pro případ, kdy $u_1=0$, viz obr.10.P1b, postupně dostaneme

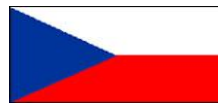
$${}^2U_3 = \frac{EA}{L} u_3.$$

$${}^2U_1 + {}^2U_3 = 0, \text{ resp. } {}^2U_1 = -{}^2U_3 = -\frac{EA}{L} u_3.$$

Nyní provedme superpozici obou dílčích případů. Výsledné síly v uzlech A a B prvku AB (v kladném směru osy X') jsou

$$U_1 = {}^1U_1 + {}^2U_1 = \frac{EA}{L} (u_1 - u_3),$$

$$U_3 = {}^1U_3 + {}^2U_3 = -\frac{EA}{L} (u_1 + u_3) = \frac{EA}{L} (u_3 - u_1).$$



Doporučená literatura ke studiu MKP

- [1] Fenner, R. T.: Finite Element Methods for Engineers. Macmillan Press, London, 1975.
- [2] Hinton, E. - Owen, D. R. J.: An Introduction to Finite Element Computations. Pineridge Press, Swansea, 1979.
- [3] Livesley, R. K.: Finite Elements: an introduction for engineers. CPU, Cambridge, 1983.
- [4] Rao, S. S.: The Finite Element Method in Engineering, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [5] Rockey, K. et al.: The Finite Method: a basic introduction. Granada, London 1975.
- [6] Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, London, 1971.
- [7] Kolář, Vl. – Němec, I. – Kanický, V.: FEM – principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 1997.



Příklad řešení prutové soustavy

Zdrojový kód příkazů pro řešení konzoly na obr. 10.4:

1. Spustit programový systém ANSYS
2. Postupně použít následující sekvence instrukcí s korektní syntaxí (symbol „!“ je prefix pro informativní komentář, který není nutno zadávat, program jej ignoruje)

fini

/clear

/filename,konzola ! pracovní název ulohy, tzv "jobname"

PI=ACOS(-1) ! definice Ludolfova čísla pro pozdější výpočet

! Rozměry průřezu tyči (trubky) v [mm]

DOUT=40 ! vnější průměr

TLT=3 ! tloušťka stěny

DINN=DOUT-2*TLT ! vnitřní průměr

! Plocha průřezu tyči

AREA=0.25*PI*(DOUT*DOUT-DINN*DINN)

! Material - ocel

EOC=2e5 ! modul pružnosti

POIOC=0.3 ! Poissonovo číslo

ROOC=7850e-12 ! hustota

ALOC=1.2e-5 ! koef. tepl. dilatace

! Geometrické parametry soustavy [mm]

L1=1000

L2=1200

! Parametr zatížení

FX3=1000 ! [N] zatížení v uzlu 3

/PREP7 ! vstup do preprocessingu

! Volba typu prvku (Element Type)

ET,1,LINK1 ! 2-D spar (or truss) element

! Vlastnost prvku - plocha průřezu tyče (tzv. Real konstanta)

R,1,AREA

! Zadání vlastnosti materialu

MP,EX,1,EOC

MP,PRXY,1,POIOC



MP,DENS,1,ROOC
MP,ALPX,1,ALOC

! Konstrukce soustavy - prima generace elementu
! Generovani uzlu souradnicemi x, y, (z=0 pro rovinnou ulohu)
N,1,0,0,0
N,2,L1,0,0
N,3,L1,L2,0

! Generovani elementu pomoci uzlu
E,1,2
E,2,3
E,3,1
! -----

! Okrajove podminky v ulozeni soustavy
D,1, , , , , UX, UY, , , ,
D,2, , , , , UY, , , , ,

! Zatizeni do uzlu 3
F,3,FX,FX3

eplo ! vykresleni soustavy elementu

fini ! ukonceni preprocessingu
! -----

/solu ! vstup do resice
parsave ! zapis parametru na disk do pracovniho adresare
save ! ulozeni databaze geometrie
solve ! aktivace resice
fini ! ukonceni resice

/post1 ! aktivace postprocessingu
set,first ! vyber reseni

PLDISP,1 ! vykresleni/zobrazeni posuvu
fini ! ukonceni postprocessingu

/exit,nosave ! opusteni programoveho systemu Ansys