

# Implementace metody konečných objemů pro nestlačitelné Navier-Stokesovy rovnice v knihovně OpenFOAM

*Petr Šidlof*

## Česko-anglický slovník termínů v CFD

| Česky                                  | Anglicky                               |
|--|--|
| metoda konečných objemů                | Finite Volume Method                   |
| nestlačitelné Navier-Stokesovy rovnice | incompressible Navier-Stokes equations |
| výpočetní síť                          | computational mesh (grid)              |
| diskretizace                           | discretization                         |
| element sítě                           | mesh element                           |
| těžiště                                | centroid                               |
| stěna (elementu)                       | face                                   |
| vazká tekutina                         | viscous fluid                          |
| zachování hybnosti                     | momentum conservation                  |
| zachování hmoty                        | mass conservation                      |
| obecná transportní rovnice             | general transport equation             |

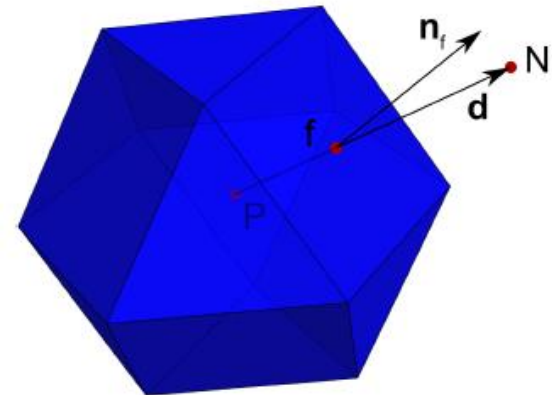
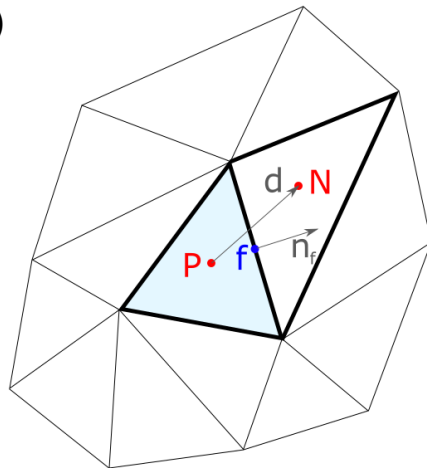
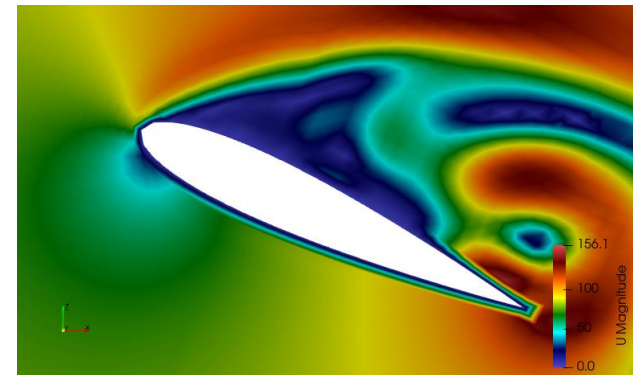
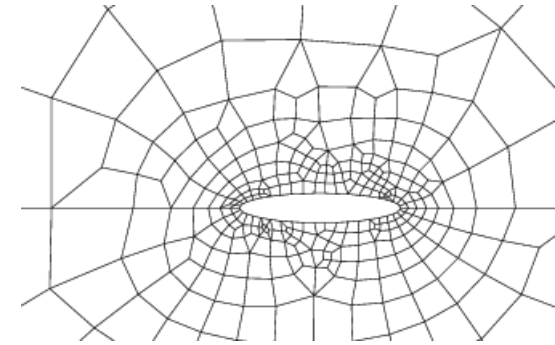
| Česky                      | Anglicky             |
|----------------------------|----------------------|
| přibližné řešení           | approximate solution |
| schéma druhého řádu        | second-order scheme  |
| časová derivace            | time derivative      |
| konvektivní člen           | convective term      |
| difuzivní člen             | diffusive term       |
| zdrojový člen              | source term          |
| kontrolní objem            | control volume       |
| interpolace                | interpolation        |
| tok                        | flux                 |
| (ne)omezené schéma         | (un)bounded scheme   |
| ortogonální                | orthogonal           |
| časový krok                | time step            |
| soustava lineárních rovnic | linear system        |
| řádká matice               | sparse matrix        |

## Česko-anglický slovník termínů v CFD

| Česky              | Anglicky            |
|--------------------|---------------------|
| složka vektoru     | vector component    |
| rovnice kontinuity | continuity equation |
| prostorový         | spatial             |
| časový             | temporal            |
| konvergence        | convergence         |
| iterační smyčka    | iteration loop      |
| rychlost           | velocity            |
| tlak               | pressure            |

## Implementace MKO v OpenFOAM – hlavní předpoklady

- nestrukturované polyhedrální sítě
- cell-centered uspořádání – diskretizované řešení se skládá pouze z hodnot veličin v těžištích elementů (P, N)
- do výpočtu ale vstupují i hodnoty veličin a gradientů v těžišti stěn elementů (f)



## Matematický model

### Nestlačitelné Navier-Stokesovy rovnice

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\rho \nu \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p$$
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

OpenFOAM

**Pozor:** u nestlačitelných solverů  $p$  .. kinematický tlak ( $p/\rho$ )

- proudění vazké, nestlačitelné tekutiny:  
 $\rho = const.$  (platí pro  $M = \frac{v}{c} < 0.3$ )
- první rovnice – zákon zachování hybnosti  
druhá rovnice – zákon zachování hmoty
- $\mathbf{v}$  .. vektor rychlosti  
 $p$  .. tlak

### Obecná transportní rovnice pro skalární veličinu $\Phi$

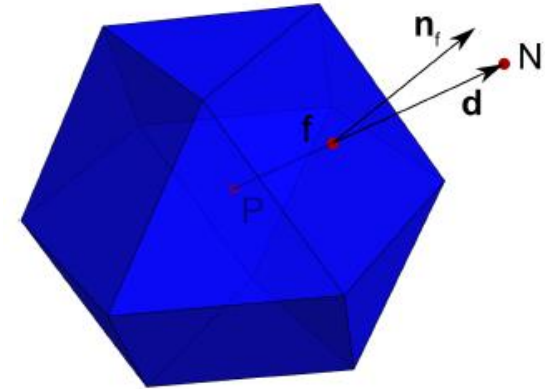
$$\underbrace{\frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t}}_{\text{časová derivace}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \Phi)}_{\text{konvektivní člen}} - \underbrace{\nabla \cdot (\rho \Gamma_{\Phi} \nabla \Phi)}_{\text{difusivní člen}} = \underbrace{S_{\Phi}(\Phi)}_{\text{zdrojový člen}}$$

- transport skalární veličiny – například koncentrace rozpuštěné látky, teplota
- rovnice formálně shodná se zákonem zachování hybnosti v N-S rovnicích
- skalární, **lineární**

## MKO pro obecnou transportní rovnici na nestruturovaných sítích

Obecná transportní rovnice pro skalární veličinu  $\Phi$

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t}}_{\text{časová derivace}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \Phi)}_{\text{konvektivní člen}} - \underbrace{\nabla \cdot (\rho \Gamma_{\Phi} \nabla \Phi)}_{\text{difusivní člen}} = \underbrace{S_{\Phi}(\Phi)}_{\text{zdrojový člen}}$$



Přibližné řešení  $\Phi$  hledáme jako funkci po částech lineární v prostoru (schéma druhého řádu) – v daném elementu má následující tvar:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_P + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot (\nabla \Phi)_P \quad \text{kde} \quad \Phi_P = \Phi(\mathbf{x}_P),$$

$$(\nabla \Phi)_P = (\nabla \Phi)(\mathbf{x}_P)$$

### Metoda konečných objemů

1) Integrace transportní rovnice přes kontrolní objem  $V_P$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_P} \rho \Phi \, dV + \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \Phi) \, dV - \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_{\Phi} \nabla \Phi) \, dV = \int_{V_P} S_{\Phi}(\Phi) \, dV$$

2) Dosazení po částech lineární aproximace  $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_P + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot (\nabla \Phi)_P$

3) Přesný výpočet nebo přibližný odhad (interpolace) jednotlivých integrálů (s využitím Gaussovy věty)

4) Integrace v čase (časová diskretizace)

## Diskretizace objemového integrálu

Obecná transportní rovnice pro skalární veličinu  $\Phi$

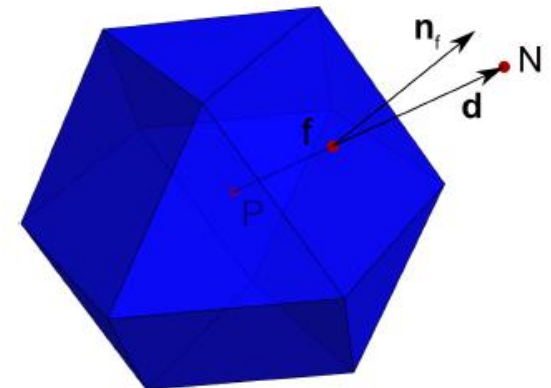
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_P} \rho \Phi \, dV + \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \Phi) \, dV - \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\Phi \nabla \Phi) \, dV = \int_{V_P} S_\Phi(\Phi) \, dV$$

$$\int_{V_P} \rho \Phi(\mathbf{x}) \, dV = \rho \int_{V_P} \Phi_P + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot (\nabla \Phi)_P \, dV = \rho \Phi_P V_P + \rho (\nabla \Phi)_P \cdot \underbrace{\int_{V_P} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \, dV}_{=0} = \rho \Phi_P V_P$$

protože  $\mathbf{x}_P$  je souřadnice těžiště

### Poznámka

integrál lze vyčíslit přesně bez nutnosti interpolace



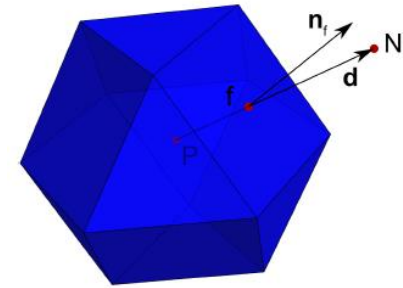
## Diskretizace konvektivního členu

Obecná transportní rovnice pro skalární veličinu  $\Phi$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_P} \rho \Phi \, dV + \int_{V_P} \nabla \cdot \underbrace{(\rho \mathbf{v} \Phi)}_{\mathbf{g}} \, dV - \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\Phi \nabla \Phi) \, dV = \int_{V_P} S_\Phi(\Phi) \, dV$$

$$\int_{V_P} \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV = \oint_{\partial V_P} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = \sum_f \left( \int_f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_f \, dS \right)$$

$$\int_f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_f \, dS = \mathbf{g}_f \cdot \mathbf{n}_f \int_f dS + \underbrace{\left( \int_f (\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \otimes \mathbf{n}_f \, dS \right)}_{=0 \text{ protože } \int_f (\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \, dS = 0 \text{ (} \mathbf{x}_f \text{ je těžiště stěny)}} : (\nabla \mathbf{g})_f = \mathbf{g}_f \cdot \mathbf{n}_f S_f$$



$$\rightarrow \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \Phi) \, dV = \sum_f (\rho \mathbf{v} \Phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f = \sum_f \Phi_f (\rho \mathbf{v})_f \cdot \mathbf{n}_f S_f$$

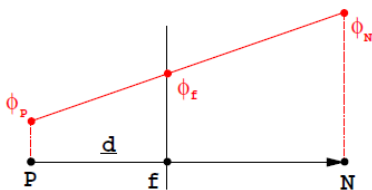
OpenFOAM

nestlač.:  $\text{phi} \dots \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}_f S_f$  [m<sup>3</sup>/s]  
 stlač.:  $\text{phi} \dots (\rho \mathbf{v})_f \cdot \mathbf{n}_f S_f$  [kg/s]

Nutnost znát hodnotu  $\Phi_f$  v těžišti stěny a tok  $(\rho \mathbf{v})_f \cdot \mathbf{n}_f S_f$  (interpolace)

### Centrální diference (CDS)

$$\Phi_f = f_x \Phi_P + (1 - f_x) \Phi_N$$



$$f_x = \overline{fN} / \overline{PN}$$

- schéma 2. řádu
- neomezené, nestabilní pro proudění s dominantní konvekcí (**nefyzikální oscilace**)

OpenFOAM: Gauss linear

### Upwinding

$$\Phi_f = \begin{cases} \Phi_P & \text{for } (\rho \mathbf{v})_f \cdot \mathbf{n}_f S_f \geq 0 \\ \Phi_N & \text{for } (\rho \mathbf{v})_f \cdot \mathbf{n}_f S_f < 0 \end{cases}$$

- schéma 1. řádu, omezené
- **numerická difuze**

OpenFOAM: Gauss upwind

### Jiné přístupy

- quadratic upwind (QUICK)
- TVD schémata (total variation diminishing schemes)
- NVD schémata (normalized variable diagram)
- **malá difuze, bez oscilací**

OpenFOAM: Gauss limitedLinear  
 Gauss vanLeer  
 Gauss MUSCL

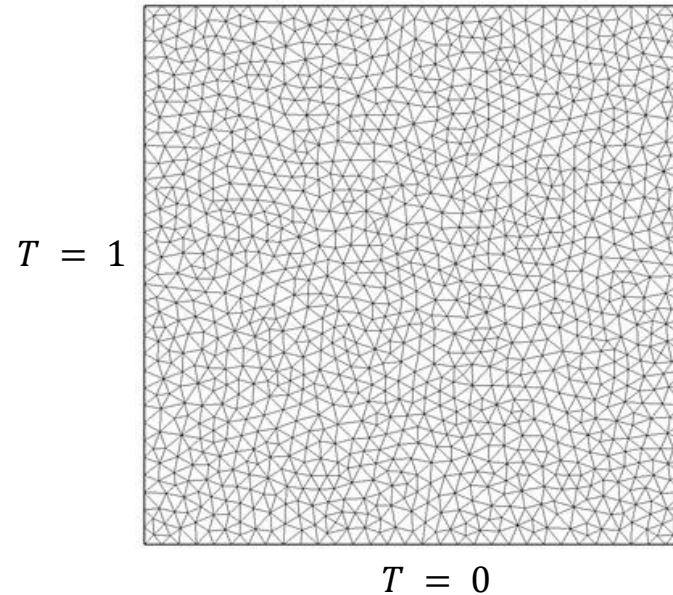
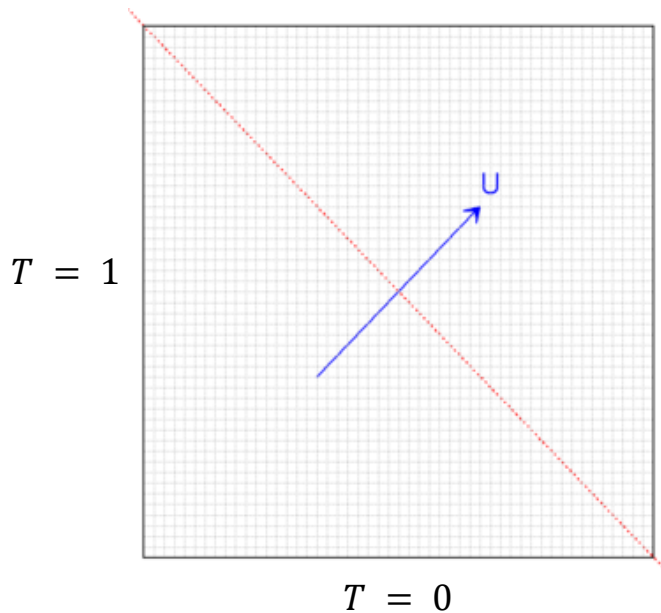


## Ukázka: numerická difuze pro různá diskretizační schémata konvektivního členu

- pasivní transport skalární veličiny  $T$  (koncentrace barviva) v uniformním proudovém poli  $\mathbf{v}$  bez přítomnosti fyzikální (molekulární) difuze
- čtvercová / trojúhelníková síť
- diskretizační schémata: upwind, CDS, TVD (vanLeer)
- koncentrační profil podél červené čáry

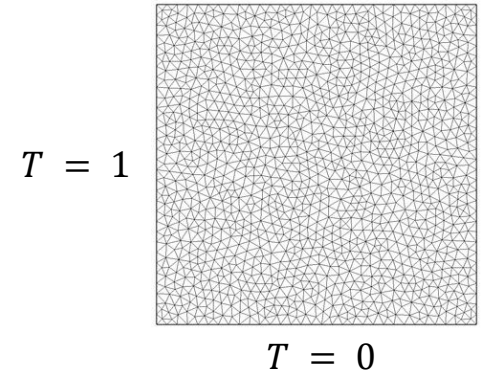
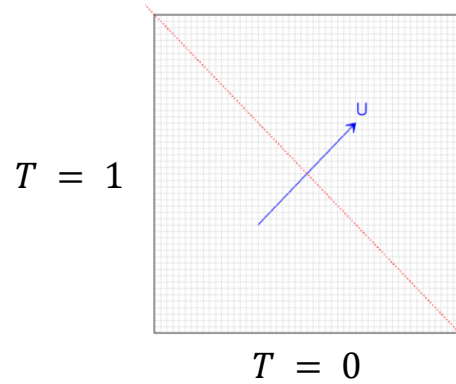
$$\frac{\partial(T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} T) - \nabla \cdot (D_T \nabla(T)) = 0$$

$$\text{stacionární, } D_T = 0 \dots \nabla \cdot (\mathbf{v} T) = 0$$

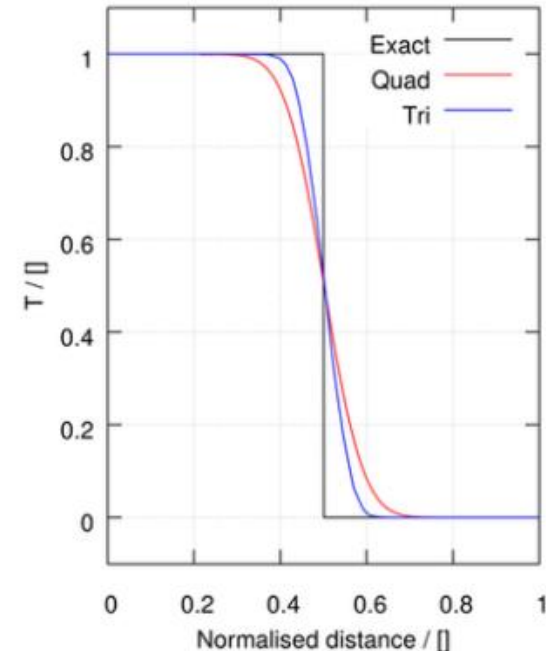
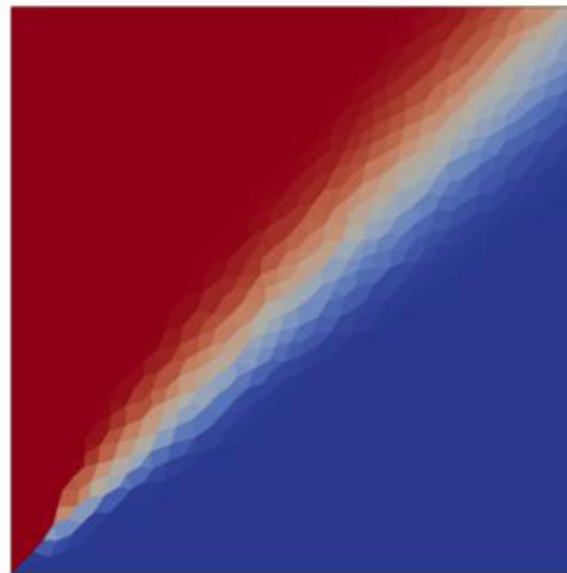
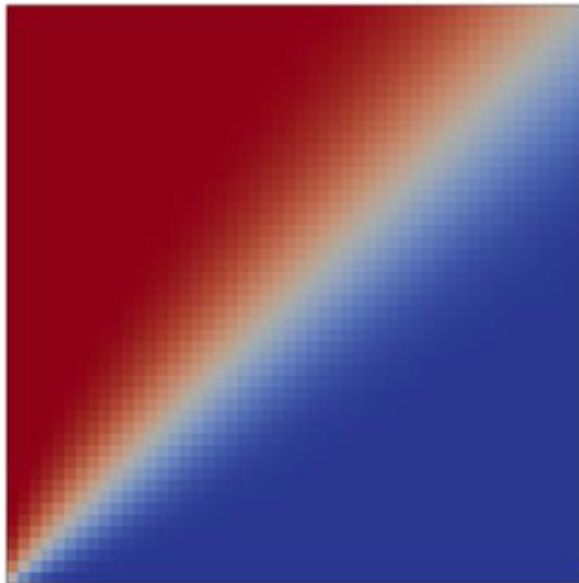


# Ukázka: numerická difuze pro různá diskretizační schémata konvektivního členu

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} T) = 0$$

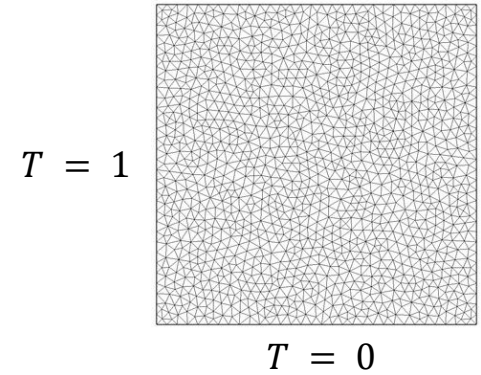
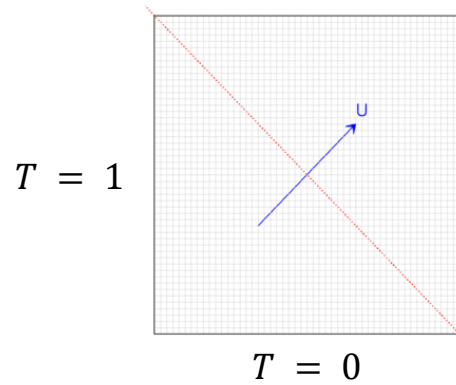


## Upwinding

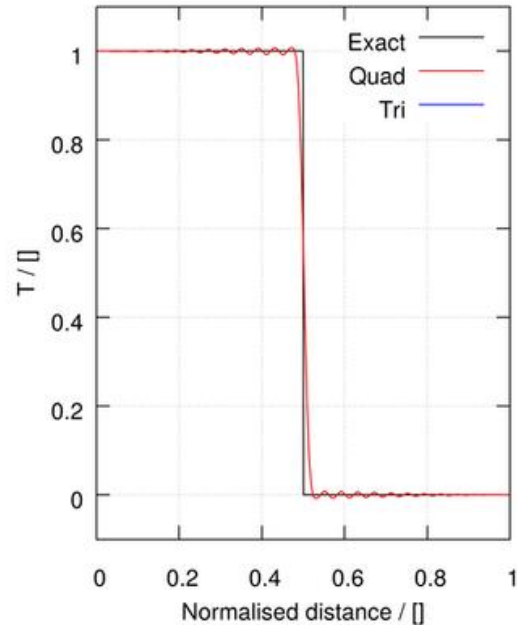
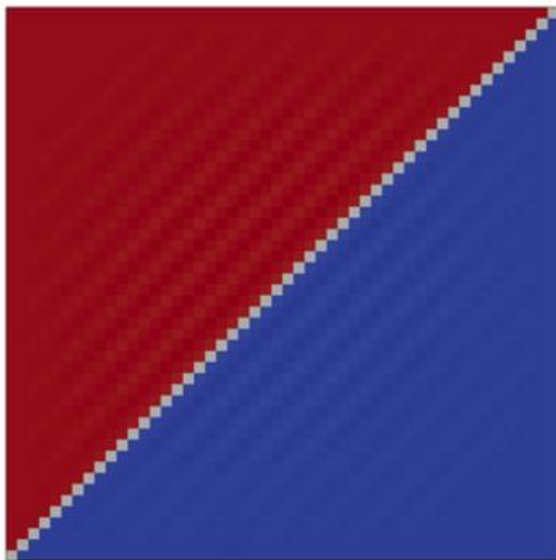


# Ukázka: numerická difuze pro různá diskretizační schémata konvektivního členu

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} T) = 0$$

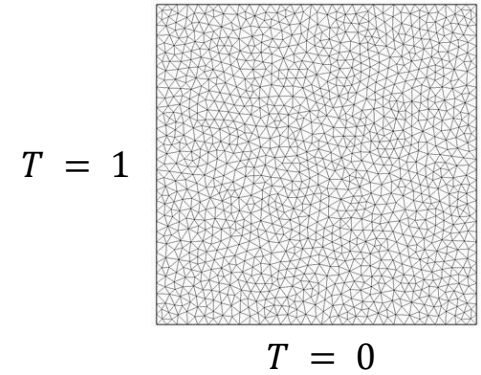
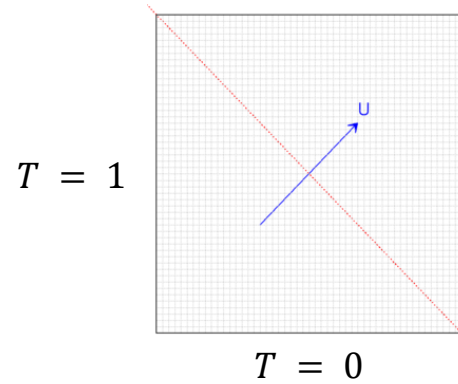


## CDS

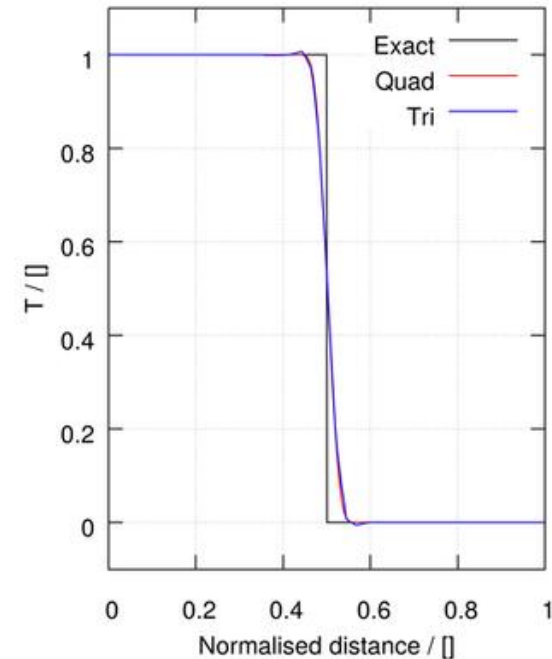
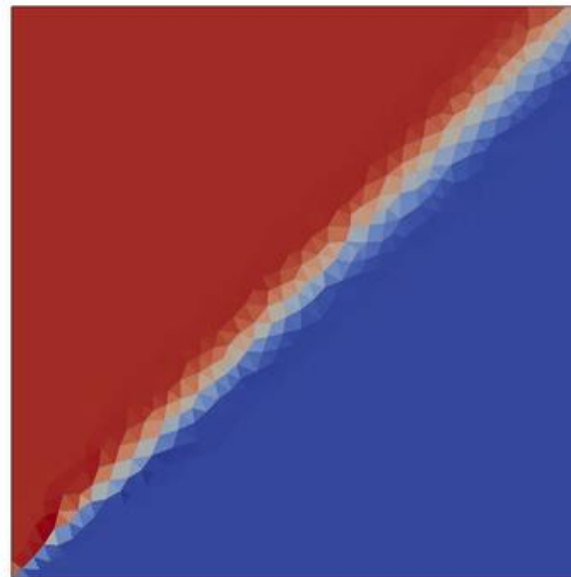


# Ukázka: numerická difuze pro různá diskretizační schémata konvektivního členu

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} T) = 0$$



## TVD (van Leer)



## Diskretizace difuzního a zdrojového členu

Obecná transportní rovnice pro skalární veličinu  $\Phi$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_P} \rho \Phi \, dV + \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \Phi) \, dV - \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\Phi \nabla \Phi) \, dV = \int_{V_P} S_\Phi(\Phi) \, dV$$

### Difuzní člen

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\Phi \nabla \Phi) \, dV = \oint_{\partial V_P} \rho \Gamma_\Phi \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} \, dS = \sum_f (\rho \Gamma_\Phi \nabla \Phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f = \sum_f (\rho \Gamma_\Phi)_f (\nabla \Phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f$$

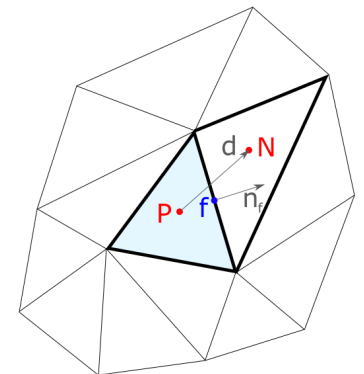
ortogonální síť (vektory  $\mathbf{d}$  a  $\mathbf{n}_f$  rovnoběžné):  $(\nabla \Phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f = S_f \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|}$

Neortogonální síť  $\rightarrow$  implementace explicitních „neortogonálních korektorů“ [Jasak – PhD]

### Zdrojový člen

linearizace:  $S_\Phi(\phi) = S_1 + S_2 \phi$

$$\rightarrow \int_{V_P} S_\Phi(\phi) \, dV = S_1 V_P + S_2 V_P \phi_p$$



## Časová diskretizace

Prostorově diskretizovaná forma obecné transportní rovnice - integrace v čase:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi_P V_P) + \sum_f \Phi_f (\rho \mathbf{v})_f \cdot \mathbf{n}_f S_f - \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f (\nabla \phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} (S_1 V_P + S_2 V_P \Phi_P) dt$$

Předp.  $V_P = const.$ ,  $\rho = const.$  :  $\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi_P V_P) dt = (\Phi_P^n - \Phi_P^0) \rho_P V_P$  , kde

$\Phi^0 = \Phi(t)$  ..... aktuální časová hladina

$\Phi^n = \Phi(t + \Delta t)$  .. nová časová hladina

### Úloha

- znám hodnotu veličiny  $g^0$  na dané časové hladině
- potřebuji znát hodnotu veličiny  $g^n$  na nové časové hladině

### Možnosti řešení

- explicitní časová schémata
- implicitní časová schémata

## Explicitní časová schémata

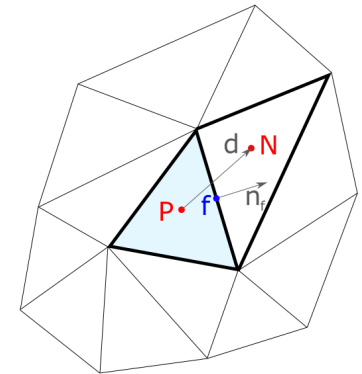
$$(\Phi_P^n - \Phi_P^0) \rho_P V_P + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \sum_f \Phi_f (\rho \mathbf{v})_f \cdot \mathbf{n}_f S_f \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f (\nabla \phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} (S_1 V_P + S_2 V_P \Phi_P) dt$$

1. Dopředné Eulerovo schéma:  $\int_t^{t+\Delta t} g(\tau) d\tau \approx g^0 \Delta t$

$$(\nabla \Phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f = \frac{S_f (\Phi_N^0 - \Phi_P^0)}{|d|} \quad (\text{pro ortogonální síť})$$

$$\Phi_f = f_x \Phi_P^0 + (1 - f_x) \Phi_N^0 \quad (\text{pro CDS})$$

- první řád
- stabilní pouze za splnění CFL podmínky – Courantovo číslo  $Co = v \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$



- všechny hodnoty  $\Phi_f$ ,  $(\nabla \Phi)_f$  aproximovány z hodnot  $\Phi_P^0$ ,  $\Phi_N^0$  v aktuálním (známém) časovém kroku
- nová hodnota  $\Phi_P^n$  lze přímo vypočítat z explicitního vztahu – není nutné řešit žádnou soustavu rovnic



# Implicitní schémata

$$(\Phi_P^n - \Phi_P^0) \rho_P V_P + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \sum_f \Phi_f (\rho \mathbf{v})_f \cdot \mathbf{n}_f S_f \right] dt - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f (\nabla \phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} (S_1 V_P + S_2 V_P \Phi_P) dt$$

**1. Zpětný Euler:**  $\int_t^{t+\Delta t} g(\tau) d\tau \approx g^n \Delta t$

$$(\nabla \Phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f = \frac{S_f (\Phi_N^n - \Phi_P^n)}{|d|}$$

$$\Phi_f = f_x \Phi_P^n + (1 - f_x) \Phi_N^n$$

- první řád, omezené

OpenFOAM – fvSchemes/ddtSchemes: Euler

**3. BDF2:**  $\int_t^{t+\Delta t} g(\tau) d\tau \approx \left( \frac{3}{2} g^n - 2g^0 + \frac{1}{2} g^{00} \right) \Delta t$

- dvoukrokové schéma – nutné ukládat výsledky v další časové úrovni (00)
- druhý řád, nezaručuje omezené řešení

OpenFOAM – fvSchemes/ddtSchemes: backward

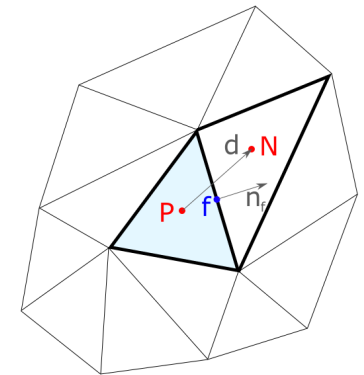
**2. Crank – Nicholson:**  $\int_t^{t+\Delta t} g(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2} (g^0 + g^n) \Delta t$

$$(\nabla \Phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f = \frac{S_f}{|d|} \frac{1}{2} [(\Phi_N^0 - \Phi_P^0) + (\Phi_N^n - \Phi_P^n)]$$

$$\Phi_f = f_x \frac{1}{2} (\Phi_P^0 + \Phi_P^n) + (1 - f_x) \frac{1}{2} (\Phi_N^0 + \Phi_N^n)$$

- druhý řád, nezaručuje omezené řešení

OpenFOAM – fvSchemes/ddtSchemes: CrankNicolson



- hodnoty v těžišti stěny  $\Phi_f$ ,  $(\nabla \Phi)_f$  aproximovány z hodnot  $\Phi_P^0$ ,  $\Phi_N^0$  i  $\Phi_P^n$ ,  $\Phi_N^n$
- nutné řešit soustavu lineárních rovnic, nepodmíněně stabilní (pro jakoukoliv velikost časového kroku)



```
C:\Users\sidofo\AppData\Local\Temp\scp55265\afs\ics.muni.cz\...
File Edit Search View Encoding Language Settings Tools Macro Run
Plugins Window ?
fvSchemes
18 ddtSchemes
19 {
20     default Euler;
21 }
22
23 gradSchemes
24 {
25     default Gauss linear;
26 }
27
28 divSchemes
29 {
30     default none;
31     div(phi,U) Gauss limitedLinearV 1;
32     div(phi,k) Gauss limitedLinear 1;
33     div(phi,epsilon) Gauss limitedLinear 1;
34     div(phi,omega) Gauss limitedLinear 1;
35     div(phi,R) Gauss limitedLinear 1;
36     div(R) Gauss linear;
37     div(phi,nuTilda) Gauss limitedLinear 1;
38     div((nuEff*dev2(T(grad(U)))) Gauss linear;
39 }
40
41 laplacianSchemes
42 {
43     default Gauss linear corrected;
44 }
45
46 interpolationSchemes
47 {
48     default linear;
49 }
50
51 snGradSchemes
52 {
53     default corrected;
54 }
55
```

## Příklad - OpenFOAM 8.0 tutorials: incompressible/pisoFoam/ras/cavity

implicitní zpětné Eulerovo schéma pro časovou diskretizaci

Gauss = standardní MKO diskretizace, lineární interpolace z těžišť elementů do středů stěn pro  $\nabla p$  (tj. centrální diference)

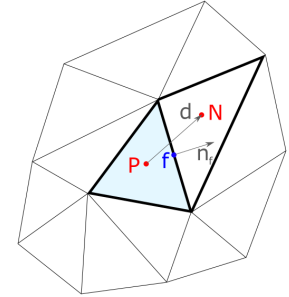
diskretizace konvektivního členu  $\nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$  - TVD omezené schéma ve vektorové variantě

diskretizace difuzivního členu  $\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{v})$  - lineární interpolace, neortogonální korektor

## Diskretizovaná transportní rovnice pro element P

**Prostorová diskretizace:** CDS, ortogonální síť

**Časová diskretizace:** C-N schéma



$$\frac{\Phi_P^n - \Phi_P^0}{\Delta t} \rho_P V_P + \frac{1}{2} \sum_f (f_x \Phi_P^n + (1 - f_x) \Phi_N^n) (\rho \mathbf{v})_f^n \cdot \mathbf{n}_f S_f + \frac{1}{2} \sum_f (f_x \Phi_P^0 + (1 - f_x) \Phi_N^0) (\rho \mathbf{v})_f^0 \cdot \mathbf{n}_f S_f - \frac{1}{2} \sum_f (\rho \Gamma_\Phi)_f^n \frac{S_f (\Phi_N^n - \Phi_P^n)}{|\mathbf{d}|} - \frac{1}{2} \sum_f (\rho \Gamma_\Phi)_f^0 \frac{S_f (\Phi_N^0 - \Phi_P^0)}{|\mathbf{d}|} = S_1 V_P + \frac{1}{2} S_2 V_P \Phi_P^n + \frac{1}{2} S_2 V_P \Phi_P^0$$

Jedná se o algebraickou rovnici pro  $\Phi_P^n$  :  $a_P \Phi_P^n + \sum_N a_N \Phi_N^n = R_P$

Sestavením diskretizovaných transportních rovnic pro všechny kontrolní objemy dostáváme soustavu lineárních rovnic  $\mathbf{A} \Phi = \mathbf{R}$

- matice  $\mathbf{A}$ : řídká (záleží na číslování elementů)
- koeficienty  $a_P$ : obsahují příspěvky z časové derivace, konvektivního a difuzivního členu, lineární část zdrojového členu
- koeficienty  $a_N$ : odpovídající příspěvky ode všech sousedících elementů
- vektor neznámých  $\Phi$  : stejný počet složek, jako je počet elementů sítě
- pravá strana  $\mathbf{R}$ : všechny členy, které lze vypočítat z minulého časového kroku (konstantní část zdrojového členu, část časové derivace, části konvektivního a difuzivního členu příslušející minulé časové úrovni)

## MKO diskretizace Navier-Stokesových rovnic

### Obecná transportní rovnice pro skalární veličinu $\Phi$

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}}_{\text{časová derivace}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\Phi)}_{\text{konvektivní člen}} - \underbrace{\nabla \cdot (\rho\Gamma_{\Phi}\nabla\Phi)}_{\text{difusivní člen}} = \underbrace{S_{\Phi}(\Phi)}_{\text{zdrojový člen}}$$

### Navier-Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou tekutinu

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\rho\nu \nabla\mathbf{v}) = -\nabla p$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

### Zákon zachování hybnosti – speciální případ obecné transportní rovnice

- vektorový tvar
- transportovaná veličina  $\Phi$  je rychlost sama – **nelinearita Navier-Stokesových rovnic**
- kinematická viskozita  $\nu$  hraje roli difuzního koeficientu pro hybnost
- $\nabla p$  - hlavní zdroj hybnosti v drtivé většině případů proudění z inženýrské praxe
- **vazba mezi tlakem a rychlostí**

### Zákon zachování hmotnosti

- v případě proudění nestlačitelné tekutiny není k dispozici žádná transportní rovnice pro tlak
- tlak figuruje jako „omezení“ v ZZH: správné tlakové pole .. řešení ZZH splňuje kontinuitu (rychlost má nulovou divergenci)

## Nelinearita v konvektivním členu

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \Phi) dV = \sum_f (\rho \mathbf{v} \Phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f = \sum_f \Phi_f (\rho \mathbf{v})_f \cdot \mathbf{n}_f S_f$$

Přímá prostorová diskretizace konvektivního členu:

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) dV = \sum_f \mathbf{v}_f \otimes (\rho \mathbf{v})_f \cdot \mathbf{n}_f S_f$$

- vede na systém nelineárních algebraických rovnic

### Řešení:

- nelineární řešič (nepraktické)
- linearizace (preferováno): tok  $(\rho \mathbf{v}^*)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f$  vypočítán z předchozího časového kroku

### Stacionární problémy

- jakmile je dosaženo konvergence, linearizace neovlivňuje řešení

### Nestacionární problémy

- vnitřní iterační smyčka přes nelineární člen
- zanedbání linearizační chyby – lze pro krátké časové kroky

## Vazba mezi tlakem a rychlostí v Navier-Stokesových rovnicích pro nestlačitelnou tekutinu

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\rho\nu \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p$$
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

### Monolitické, silně sdružené řešiče

- diskretizace všech tří rovnic pro složky hybnosti a tlak do jedné matice
- matice má pro numerické řešení nevhodnou strukturu, řešení náročné na paměť a výkon
- Fluent

### Segregované řešiče

- vazba mezi tlakem a rychlostí řešena iteračním postupem
- prediktorové a korektorové kroky pro tlak a složky hybnosti (s relaxací)
- OpenFOAM, Fluent
- algoritmus **SIMPLE** (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations, Patankar & Spalding 1972) – ustálené proudění
- algoritmus **PISO** (Pressure Implicit with Splitting of Operators, Issa 1986) – nestacionární proudění

```
Lister - [d:\projekty\Turbo flutter\2021-11-15_Duke\log]
File Edit Options Encoding Help 0%

Time = 0.0205895
DILUPBiCG: Solving for Ux, Initial residual = 0.002278, Final residual = 4.47125e-05, No Iterations 1
DILUPBiCG: Solving for Uy, Initial residual = 0.00535883, Final residual = 0.000119289, No Iterations 1
DILUPBiCG: Solving for Uz, Initial residual = 0.00865968, Final residual = 0.000155118, No Iterations 1
GAMG: Solving for p, Initial residual = 0.0165974, Final residual = 0.00015191, No Iterations 3
GAMG: Solving for p, Initial residual = 0.000954969, Final residual = 8.26569e-06, No Iterations 5
time step continuity errors : sum local = 2.02041e-08, global = -1.47211e-10, cumulative = -1.79708e-06
GAMG: Solving for p, Initial residual = 0.00184916, Final residual = 1.46585e-05, No Iterations 3
GAMG: Solving for p, Initial residual = 0.000148872, Final residual = 1.11369e-06, No Iterations 5
time step continuity errors : sum local = 2.72123e-09, global = -2.27342e-11, cumulative = -1.7971e-06
DILUPBiCG: Solving for Ux, Initial residual = 0.000102468, Final residual = 1.67317e-06, No Iterations 2
DILUPBiCG: Solving for Uy, Initial residual = 0.000186185, Final residual = 5.7783e-06, No Iterations 1
DILUPBiCG: Solving for Uz, Initial residual = 0.000243805, Final residual = 6.14268e-06, No Iterations 1
GAMG: Solving for p, Initial residual = 0.00906228, Final residual = 6.13657e-05, No Iterations 4
GAMG: Solving for p, Initial residual = 0.000850264, Final residual = 4.66476e-06, No Iterations 5
time step continuity errors : sum local = 1.15075e-08, global = 4.276e-11, cumulative = -1.79706e-06
GAMG: Solving for p, Initial residual = 0.00110849, Final residual = 5.19305e-06, No Iterations 4
GAMG: Solving for p, Initial residual = 0.000113898, Final residual = 9.17278e-07, No Iterations 4
time step continuity errors : sum local = 2.26343e-09, global = 5.02518e-11, cumulative = -1.79701e-06
ExecutionTime = 288826 s ClockTime = 289208 s
Courant Number mean: 0.0812036 max: 0.960402
deltaT = 1.31422e-06

Time = 0.0205908
DILUPBiCG: Solving for Ux, Initial residual = 0.00227892, Final residual = 4.46727e-05, No Iterations 1
DILUPBiCG: Solving for Uy, Initial residual = 0.00536021, Final residual = 0.000119299, No Iterations 1
DILUPBiCG: Solving for Uz, Initial residual = 0.0086588, Final residual = 0.000155089, No Iterations 1
GAMG: Solving for p, Initial residual = 0.0165826, Final residual = 0.00015165, No Iterations 3
GAMG: Solving for p, Initial residual = 0.000954959, Final residual = 8.21223e-06, No Iterations 5
time step continuity errors : sum local = 2.0073e-08, global = -1.39683e-10, cumulative = -1.79715e-06
GAMG: Solving for p, Initial residual = 0.00185233, Final residual = 1.51351e-05, No Iterations 3
```

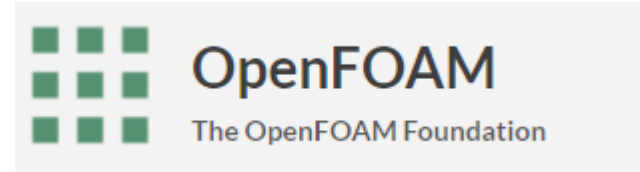
## Příklad - OpenFOAM 8.0 tutorials: incompressible/pisoFoam/ras/cavity

```
*C:\Users\sidofo\AppData\Local\Temp\scp03113\afs\ics.muni.cz\software\ope
File Edit Search View Encoding Language Settings Tools Macro F
controlDict x
1 /*----- C++ -----*/
2
3 // \ / Field | OpenFOAM: The Ope
4 // \ / Operation | Website: https://
5 // \ / And | Version: 8
6 // \ / Manipulation |
7 /*-----*/
8 FoamFile
9 {
10     version      2.0;
11     format       ascii;
12     class        dictionary;
13     location     "system";
14     object       controlDict;
15 }
16 // *****
17
18 application     pisoFoam;
19 startFrom       startTime;
20 startTime       0;
21 stopAt         endTime;
22 endTime        10;
23 deltaT         0.005;
24 writeControl    timeStep;
25 writeInterval  100;
26 purgeWrite     0;
27 writeFormat    ascii;
28 writePrecision  6;
29 writeCompression off;
30 timeFormat     general;
31 timePrecision  6;
32 runtimeModifiable true;
33
34
35 // *****
36
length: 1 032 lines: 36 Ln: 32 Col: 1 Pos: 927
```

algoritmus PISO – nestacionární proudění

časový krok  $\Delta t$

# OpenFOAM



## Filozofie a implementace OpenFOAM

- volně dostupný CFD software distribuovaný pod GNU GPL licencí (zdrojové kódy!)
- používaný jak v akademické, tak v komerční sféře
- všechny knihovny naprogramovány v objektovém jazyce C++, cca 1mil řádků kódu
- hlavní distribuce pro Linux (Ubuntu), přes různé technologie lze spustit i na Windows a MacOS
- většina solverů paralelizována – výpočty lze spustit na superpočítačích a clusterech

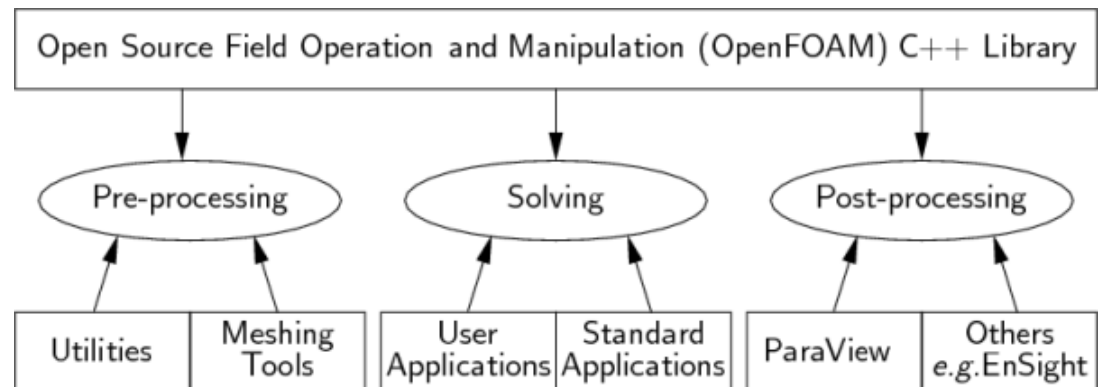
## Práce s OpenFOAM

- ve volné verzi žádné GUI – místo klikání se vše nastavuje v textových souborech
- roztržitěná a neúplná dokumentace
- neobsahuje nástroje pro modelování geometrie
- dva generátory sítí (blockMesh, snappyHexMesh) – oba pouze přes textové soubory
- možnost importu sítí
- vizualizace výsledků: volně dostupný software ParaView



## Architektura OpenFOAM

- **Solvery** – řešení konkrétního problému z oblasti mechaniky tekutin. Příklady:
  - `icoFOAM`: segregovaný řešič pro stacionární laminární proudění nestlačitelné tekutiny
  - `interFOAM`: řešič na bázi metody Volume of Fluid pro vícefázové proudění dvou nestlačitelných tekutin
  - cca 250 dalších
- **Utility** – nástroje pro manipulaci s daty (preprocessing, generování, konverze a manipulace se sítěmi, postprocessing). Příklady:
  - `blockMesh` – generátor blokově strukturovaných sítí
  - `fluentMeshToFoam` – import sítě z Fluentu
  - `sample` – vzorkování 2D řezů z 3D dat



***Možnost využít zdrojové kódy a vytvářet vlastní modifikované řešiče a nástroje!***



## Programování v OpenFOAM

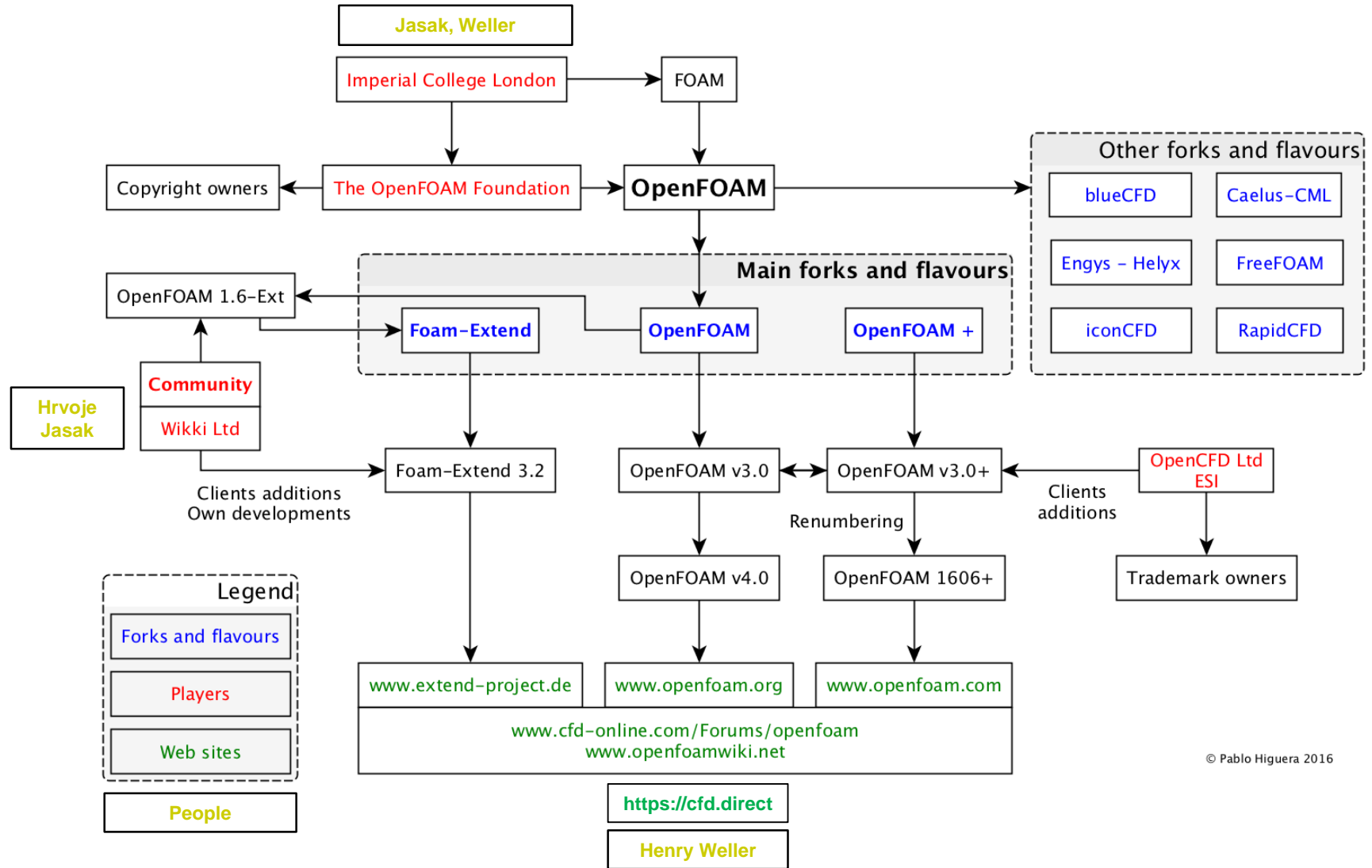
- silně objektově orientovaný kód
- třídy a jejich instance použité pro reprezentaci
  - vektorových a tenzorových polí (například rychlostní pole – `vectorField`)
  - výpočetní sítě – `fvMesh`
  - numerických toků – `fvCFlux`
  - ....
- silně využívané šablony datových tříd (template classes), přetěžování operátorů (operator overloading), virtuální třídy
- snaha o syntaxi velmi podobnou matematickému zápisu:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \phi \mathbf{U} - \nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{U} = -\nabla p$$



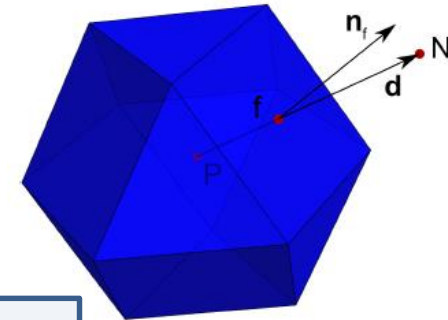
```
solve
(
    fvm::ddt(rho, U)
    + fvm::div(phi, U)
    - fvm::laplacian(mu, U)
    ==
    - fvc::grad(p)
);
```

# OpenFOAM – varianty a zainteresované organizace



## SHRNUTÍ

MKO v cell-centered uspořádání pro nestrukturované polyhedrální síť.



### Diskretizace

- **objemový integrál** – nevyžaduje interpolaci
- **konvektivní člen** – interpolace hodnoty  $\Phi_f$  v těžišti stěny
  - centrální diference (bez numerické difuze, oscilace)
  - upwinding (numerická difuze, bez oscilací)
  - TVD / NVD schémata (menší difuze, bez oscilací)
- **difuzní člen** – interpolace  $(\nabla\Phi)_f \cdot \mathbf{n}_f S_f$  (neortogonální korektory)
- **časová diskretizace (integrace)** – explicitní / implicitní schémata
  - explicitní: dopředný Euler, CFL podmínka  $Co = v \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$ . Přímý výpočet.
  - implicitní: zpětný Euler, Crank-Nicholson, BDF2. Řešení lin. soustavy.

**Specialita N-S rovnic:** nelinearita v konvektivním členu, vazba mezi rychlostí a tlakem

- segregované algoritmy PISO (nestacionární), SIMPLE (stacionární)
- monolitické řešiče